بحوث العمليات

إعداد

د / ياسر محمد عامر

الاستاذ المساعد بقسم الرياضة والإحصاءو التأمين

معاهد القاهرة العليا بالمقطم

المحتـوي

الفصل الاول
نشأة بحوث العمليات

مقدمة

لم تعد القرارات الإدارية في العصر الحديث تعتمد علي الحدس والتخمين و على التجربة والخطأ ، وا ٕنما أصبحت ترتكز على أساس علمي ، دعامته الطريقة العلمية في البحث وأساسه استخدام الأسلوب الكمي للتوصل إلى قرارات أكثر دقة وأصالة علمية .

وا ٕذا كان أسلوب الإدارة التقليدية يتماشى مع الوضع في الماضي بكل ما صاحبه من ظروف ساهمت في الحفاظ عليه حتى عصرنا هذا ، إلا أن الإدارة اليوم تواجه نوعاً من التحدي الناتج عن زيادة أعبائها ، وعدم استقرار الظروف والعوامل المحيطة بها .لذلك فإن كل تقدم تحرزه في سبيل التغلب على هذا التحدي ومواجهته يحقق مزيداً من التقدم ليس فقط في المجتمع المحلي وا ٕنما على مستو ى المجتمع العالمي كله . فالإدارة لا تمثل أهمية بالغة للدول المتقدمة فقط ، وا ٕنما تزداد أهميتها بالنسبة للدول النامية . فلولاها ما وصلت المؤسسات في الدول المتقدمة إلى المستوى الهائل من الكفاءة والقدرة الإنتاجية وبدونها سوف لا تحقق الدول النامية أهدافها في التقدم والرخاء .

كان لزاماً على المتخصصين في العلوم الإدارية البحث عن قواعد وأسس جديدة للعمل والسلوك الإداري، وذلك مثل بلوغ مستويات الجودة الشاملة ومقاييس المواصفات العالمية

(الأيزو) والإنتاج الآني وغير ذلك ومن هنا ازدادت الحاجة والرغبة نحو اعتماد أساليب علمية متطورة لترشيد القرار الإداري لكي يأتي متجانساً مع ما هو مطروح من تحديات أمام المنظمات الإدارية ومنظمات الأعمال إن هذه الأساليب في مجموعها تعرف باسم بحوث العمليات والذي عرف من قبل المختصين في العلوم الإدارية المنهج الكمي لدراسة الإدارة العامة حيث نمت وتطورت أساليب بحوث

العمليات جنباً إلى جنب مع النمو والتطور الذي حصل في تقنيات الحاسوب والبرمجيات العلمية مما ساعد على توسعه وزيادة تطبيقه في الواقع العملي لمعالجة الكثير من المشاكل في وظائف منظمة الإدارة المختلفة (إنتاج ، أفراد ، خزين ، مالية ،.... إلخ)وسوف أحاول شرح بعض التطبيقات لأساليب بحوث العمليات من خلال نمذجة هذه المشاكل وفق تكتيك رياضي معين حسب طبيعة ومتغيرات المشكلة .

نشأة وتطور بحوث العمليات

تعتبر بحوث العمليات امتداد للاتجاه العلمي في الإدارة ولقد جاء تطبيقها في هذا المجال متأخراً وكان من الممكن أن يستمر لولا التقدم الذي أحرزته القوات الجوية الملكية البريطانية في فتر ة الحرب العالمية الثانية (1939م) في هذا المجال فلقد ظهرت حاجة بريطانيا ماسة إلى مساهمة العلماء في فروع العلوم المختلفة لوضع أسلوب لصد الهجوم الألماني الجوي فعمل فريق من العلماء المتخصصين في بحوث العمليات في استغلال الموارد المحدودة من الرجال والمعدات وتحويل بريطانيا من الدولة المدافعة إلى الدولة المهاجمة .

مفهوم بحوث العمليات

لقد اختلفت وجهات النظر وتباينت الآراء في إيجاد تعريف محدد لبحوث العمليات وخلط البعض بينها وبين بعض الاصطلاحات الأخرى مثل تحليل العمليات وتحليل النظم .

فما الذي تعنيه بحوث العمليات ؟ وبماذا تختلف عن تحليل العمليات والنظم ؟

لقد حاول بعض الكتاب تعريف بحوث العمليات – ونورد هنا أكثر هذه التعريفات شيوعاً

تعريف واجنر : بحوث العمليات هي مدخل العلم المستخدم في حل المشكلات التي تصادف الإدارة العليا للمشروعات ولا يعطى هذا التعريف مفهوماً واضحاً لبحوث العمليات فهو يقيدها بحل المشكلات ، كما يحدد نطاقها بالإدارة العليا

للمشروعات وبحوث العمليات يتسع نطاقها عن هذا التعريف ، فهي تتعلق باتخاذ القرارات سواءً على نطاق الإدارة التنفيذية أو الإدارة العليا للمشروع .

تعريف مورس ، و كمبال : فقد عرفا بحوث العمليات بأنها تطبيق الطريقة العلمية بتوفير الأساس الكمي الذي يمكن الإدارة من اتخاذ القرارات . هذا التعريف يحدد العناصر الرئيسية لبحوث العمليات وهي استخدام الطريقة العلمية وتوفير الأساس الكمي في اتخاذ القرارات الإدارية ، إلا أن التعريف يمكن أن يكون تعريفاً مناسباً لأساليب الإدارة الأخرى التي ترتكز على الأساس الكمي مثل محاسبة التكاليف .

ومن التعاريف السابقة يمكننا أن نستنتج الاتفاق على بعض الخصائص التي تحدد إطار بحوث العمليات وهي

1. استخدام الطريقة العلمية
2. الارتكاز على الأساس الكمي ممثلاً في أدوات وأساليب بحوث العمليات
3. تمكين الإدارة من اتخاذ قرارات أكثر موضوعية

وعلى أساس ذلك يمكننا وضع تعريف محدد لبحوث العمليات بأنها تطبيق الطريقة العلمية بتوفير الأساس الكمي باستخدام أدوات وأساليب بحوث العمليات كالبرامج الخطية وشبكة الأعمال وذلك لتمكين الإدارة من اتخاذ قرار أكثر موضوعية. ويختلف مفهوم تحليل النظم عن بحوث العمليات ، فتحليل النظم يعني تحليل المكونات التي يتكون منها النظام إلى أجزاء رئيسية ، وبيان الدور الذي يؤديه كل جزء وعلاقته بالأجزاء الأخرى وأهميته في تركيب النظام كوحدة متكاملة وتحليل النظم يساعد الإدارة على تحقيق كفاءة المنظمة ككل دون التركيز على بعض أجزائها .

ونفرض أن الإدارة عليها أن تتخذ قراراً فيما يختص بعدد السلع التي تنتجها وكمية المخزون منها ، فبينما تفضل إدارة الإنتاج عدداً قليلاً من السلع بكميات كبيرة من المخزون لتشغيل طاقة المصنع ، فإن إدارة المبيعات تفضل التعامل مع عدد أكبر من السلع وكميات أكبر من المخزون حتى تتمكن من تلبية احتياجات المستهلكين عند الطلب ، ومفهوم النظم يشير إلى أنه لابد من التوفيق بين أهداف أجزاء النظام بما يخدم مصلحة المنظمة ككل وتطبيق مفهوم النظم في التخطيط الإداري ،

يـُعرف ((بتحليل النظم)) وبحوث العمليات ترتكز على مفهوم تحليل النظم كأساس لاتخاذ القرارات الإدارية .

عملية صنع القرار وعلم الإدارة

تتضمن عملية صنع القرار الخطوات التالية

1. **تعريف المشكلة**
2. **تحديد البدائل**
3. **اختيار مقياس للمقارنة بين البدائل**
4. **تقييم البدائل**
5. **اختيار أحد البدائل**

أسباب الحاجة إلى أساليب بحوث العمليات

قد لا يكون هناك حاجة دائمة لأساليب بحوث العمليات إذا كان العمل صغيراً نسبياً خاصةً وأن التحليل الكمي يحتاج إلى الكثير من المعرفة التي قد لا تتوفر لدى المدير مما سيجعله سيضطر إلى الاستعانة بخبراء متخصصين مما يعني زيادة في التكاليف ، ولكن هناك ظروف وحالات تجعل من بحوث العمليات أداة لا غنى عنها في صـنع القرار

ويمكننا القول بأن الهدف من استخدام بحوث العمليات هو تخفيض نسبة المخاطرة في اتخاذ القرارات إلى أدنى حد ممكن .

استخدام النماذج في بحوث العمليات

أهم النماذج المستخدمة هي النماذج الرياضية ، والمحاكاة الآلية وهي من حيث المبدأ لا تختلف عن النماذج الأخرى من حيث أنها تمثل وصفاً لموقف أو موضوع معين فمثلاً يمكن صياغة العمليات التي تقوم بها المنظمة في النموذج الرياضي التالي :

الدخل الصافي = الإيرادات – التكاليف

وبطبيعة الحال فإن أطراف المعادلة يمكن تقسيمها إلى عدة أجزاء . فالتكاليف قد تشمل التكاليف الثابتة والتكاليف المتغيرة ، وكذلك الحال بالنسبة للإيرادات فهي قد تشملإيرادات تشغيلية ، وا إيرادات عرضية ، وأخرى استثمارية .

ويتم بناء النماذج الرياضية في بحوث العمليات من خلال كتابة المشكلة الإدارية في شكل معادلات تضم في تكوينها مجموعة من المتغيرات التي يمكن التحكم فيها ، ومجموعة أخرى من المتغيرات التي لا تستطيع المنظمة التحكم فيها . فمثلاً نجد أن القرار الإداري الخاص بتغيير أسعار منتجات الشركة لا يقف عند حد تغيير الأسعار بل لابد من دراسة تأثير هذا القرار على الإنتاج ، والمبيعات ، والطلب ، وهكذا وعلى هذا فإن النماذج الرياضية لا تقف عند حد استعراض هذه المتغيرات ولكن أيضاً تحليل العلاقة والتفاعل بينها ، وذلك من خلال سلسلة من المعادلات الرياضية.

أساليب بحوث العمليات ومجالات تطبيقها

من أهم أساليب بحوث العمليات المعروفة في الواقع العملي :

1. **البرمجة الخطية**
2. **البرمجة العددية**
3. **جدول المشاريع وتحليل الشبكات**
4. **المحاكاة**
5. **نظرية الصفوف**
6. **تحليل القرارات**
7. **البرمجة غير الخطية**
8. **أسلوب التحليل الشبكي**
9. **نموذج سلاسل ماركوف**

الفصل الثاني
البرمجة الخطية

ظهرت البرمجة الخطية عام 1947م وبالأخص بعد الحرب العالمية الثانية على يد عالم الرياضيات George B. Dantzig الذي كان يعمل خبيرا فى الجيش الأمريكي، وفى عام 1949م نشر جورج دانزيج الطريقة المبسطة Simplex Algorithm لحل البرامج الخطية (المسائل الخطية)، ومنذ هذا الوقت انهالت الاسهامات فى تحسين حل البرامج الخطية بطرق جديدة.

تعريف البرمجة الخطية

يمكن تعريف البرمجة الخطية بأنها هيكل رياضي يشمل على فروض رياضية معينة ويستطيع حل مشكلة تخصيص الموارد المحدودة المتاحة لمتخذ القرار علي بدائل الاستخدام العديدة المتاحة له و ذلك باستخدام خطوات و إجراءات حل رياضية محددة ، بافتراض أن العلاقات بين متغيرات المشكلة تتميز أساساً بالخطية يتم حل مشاكل البرمجة الخطية بإحدى أسلوبين هما الحل البياني و الحل الجبري (السمبلكس).

وتهدف البرمجة الخطية إلى الإجابة باسلوب التحليل الرياضي على بعض الأسئلة وحل المشاكل بما يحقق اكبر ربح ممكن أو اقل تكلفة ممكنة في ظل القيود والمحددات القائمة.

صياغة المشكلة:

المشكلات الامثلية غالبا ما تاتي في صورة كلامية. وتحدد طريقة الحل في تصوير المشكلة في شكل نموذج رياضي يعبر عن المشكلة، ومن ثم يحل هذا النموذج بالاساليب المختلفة. ويمكن اتباع الخطواط التالية في بناء النموذج الرياضي.

1. حدد الكميات التي تحتاج الى قيم مثلى. وعرفها كمتغيرات لتاخذ الرموز $x_1, x_2, \ldots,$

2. عرف هدف المشكلة وغبر عنه رياضياً باستخدام المتغيرات .

3. حدد ومثل القيود في صورة متباينات وذلك باستخدام المتغيرات.

4. اضف الى النموذج الرياضي شرط عدم السالبية (جميع المتغيرات يجب ان تكون اكبر من او تساوي الصفر).

أولاً الــحــل الـبـيـانــي لنماذج البرمجة الخطية

إن الحل البياني لنماذج البرمجة الخطية لا يمكن تطبيقة إلا في حالة كون متغيرات القرار في البرنامج أثنان فقط x_1, x_2 ويعتمد الحل البياني لنماذج البرمجة الخطية علي مجموعة من الخطوات يمكن إيجازها كالتالي .

خطوات الحـــل

1)نقوم بتحديد دالة الهدف سواء كانت نهاية عظمي أو نهاية صغري و كتابة المعادلة الدالة لهذا الهدف

2)نقوم بتحديد القيود و وضع هذه القيود في صورة متباينات

3) نقوم بوضع شرط عدم السالبية و هو $x_1, x_2 \geq 0$

4)نقوم بتحويل المتباينات إلى معادلات

5)نقوم بتمثيل المعادلات السابقة علي إحداثي (x_1, x_2)

6)بعد ذلك نحدد منطقة الحلول الممكنة و ذلك عن طريق قبول المنطقة اسفل كل خط إذا كانت المتباينة التي تخصه تأخذ علامة أقل من اويساوي أوقبول المنطقة أعلي الخط الذي تأخذ المتابينة الخاصة به علامة أكبرمن او يساوي

وتكون منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي تحقق كل متابينات المثال.

7) نحدد النقاط التي تحيط بمنطقة الحلول الممكنة بإحداثيات (x_1, x_2)

8) أختبار أي من تلك النقاط الذي يحقق وضع الامثالية لدالة الهدف

ولفهم الخطوات السابق ذكرها نقوم بشرح المثال التالي

مثـال (1)

أوجد قيم x_1, x_2 التي تعظم الدالة z حيث

$$Max \quad z = 300x_1 + 200x_2$$

Subject to (S.T) تحت القيود

$$x_1 + 2x_2 \leq 1000$$

$$3x_1 + x_2 \le 750$$
$$x_1 + 4x_2 \le 800$$

و شرط عدم السالبية $x_1, x_2 \ge 0$

الحــــــل

1) نقوم بتحويل المتباينات إلى معادلات

$$x_1 + 2x_2 = 1000 \qquad \Rightarrow (1)$$

و لرسم هذه المعادلة نقوم بعمل التعويض التالي

نفرض ان $x_1 = 0$ **و نحسب** x_2 **كالتالي** $\Rightarrow 0 + 2x_2 = 1000$ $\Rightarrow x_2 = \frac{1000}{2} = 500$	**نفرض ان** $x_2 = 0$ **و نحسب** x_1 **كالتالي** $\Rightarrow x_1 + 2 \times 0 = 1000$ $\Rightarrow x_1 = 1000$

و نلخص النتائج في الجدول التالي

x_1	**Zero**	**1000**
x_2	**500**	**Zero**

$$3x_1 + x_2 = 750 \qquad \Rightarrow (2)$$

و لرسم هذه المعادلة نقوم بعمل التعويض التالي

نفرض ان $x_1 = 0$ و نحسب x_2 كالتالي

$\Rightarrow 3 \times 0 + x_2 = 750$

$\Rightarrow x_2 = 750$

نفرض ان $x_2 = 0$ و نحسب x_1 كالتالي

$\Rightarrow 3x_1 + 0 = 750$

$\Rightarrow x_1 = \frac{750}{3} = 250$

و نلخص النتائج في الجدول التالي

x_1	**Zero**	**250**
x_2	**750**	**Zero**

$$x_1 + 4x_2 = 800 \qquad \Rightarrow (3)$$

و لرسم هذه المعادلة نقوم بعمل التعويض التالي

نفرض ان $x_1 = 0$ و نحسب x_2 كالتالي

$\Rightarrow 0 + 4x_2 = 800$

$\Rightarrow x_2 = \frac{800}{4} = 200$

نفرض ان $x_2 = 0$ و نحسب x_1 كالتالي

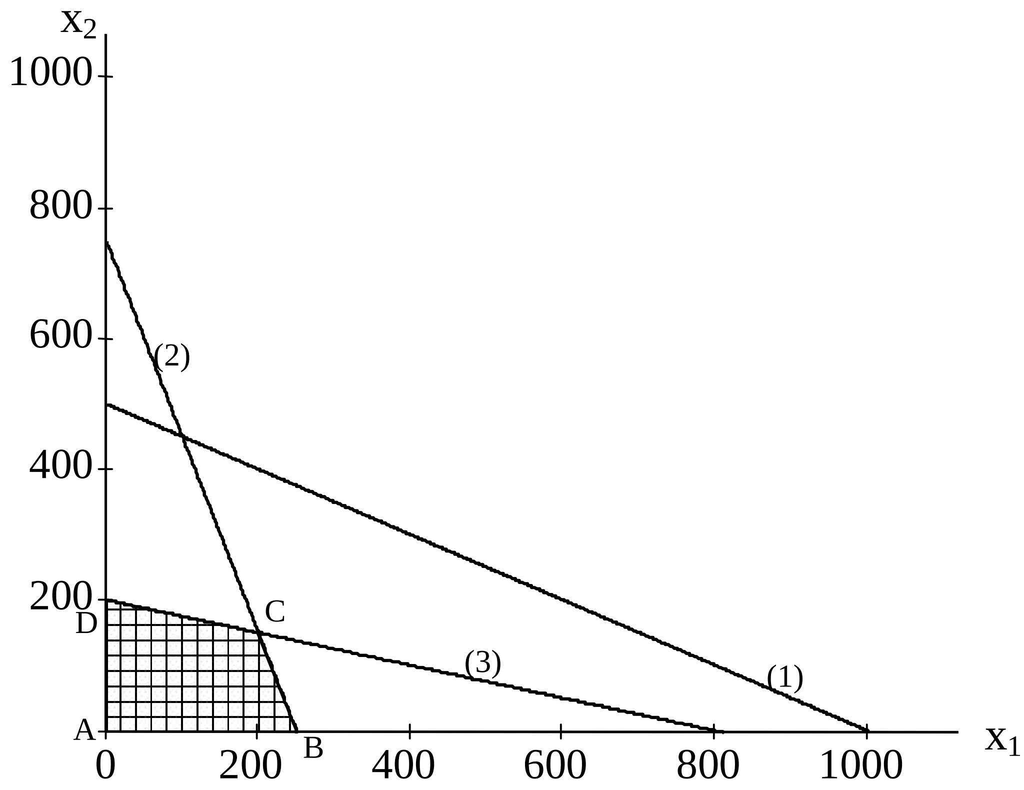
$\Rightarrow x_1 + 4 \times 0 = 800$

$\Rightarrow x_1 = 800$

و نلخص النتائج في الجدول التالي

x_1	**Zero**	**800**
x_2	**200**	**Zero**

2) بعد إيجاد نقط الرسم لكل خط نقوم برسم المخطط كالتالي



من الرسم نلاحظ أن المتباينة الأولي تحمل علامة ≥ و بالتالي فأن المساحة اسفل الخط الذي يمثلها هي منطقة حلول لها و المتباينة الثانية تحمل علامة ≥ و بالتالي فأن المساحة اسفل الخط الذي يمثلها هي منطقة حلول لها و المتباينة الثالثة تحمل علامة ≥ و بالتالي فأن المساحة اسفل الخط الذي يمثلها هي منطقة حلول لها وبالتالي فأن منطقة الحلول الممكنة المساحة التي تشترك في الثلاث مساحات السابقة معاً و هي المنطقة[A,B,C,D]

3) النقط التي تحيط بمنطقة الحلول هي [A,B,C,D]ويكون إحداثي النقط

$A = (0,0)$ $B = (250,0)$ $D = (0,200)$

النقطة C هي تقاطع الخطين 2,3ولذلك نقوم بحل المعادلتين معاً لحساب النقطة C

$$3x_1 + x_2 = 750 \qquad \Rightarrow (2)$$
$$x_1 + 4x_2 = 800 \qquad \Rightarrow (3)$$

بضرب المعادلة الثانية × 3- تصبح كالتالي

$$-3x_1 - 12x_2 = -2400$$

و بجمع المعادلة الناتجة علي المعادلة الاولى ينتج أن

$$\cancel{3x_1} + x_2 = 750$$
$$-\cancel{3x_1} - 12x_2 = -2400$$

$$-11x_2 = -1650$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{1650}{11} = 150$$

و بالتعويض عن x_2 في أي معادلة و لتكن الاولي نجد أن

$$3x_1 + 150 = 750$$

$$\Rightarrow 3x_1 = 750 - 150 = 600$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{600}{3} = 200$$

$$\therefore \ C = (200,150)$$

4) نقوم بتصميم الجدول التالي

النقطة	X_1	X_2	دالة الهدف $z = 300x_1 + 200x_2$
A	0	0	$300 \times 0 + 200 \times 0 = 0$
B	250	0	$300 \times 250 + 200 \times 0 = 75000$
C	200	150	**$300 \times 200 + 200 \times 150 = 90000$**
D	0	200	$300 \times 0 + 200 \times 200 = 40000$

ثم نختار النقطة التى تعطى اعلي قيمة لدالة الهدف لان دالة الهدف كانت تعظيم و هى النقطة C

$$\therefore \quad x_1 = 200 \qquad\qquad x_2 = 150$$

ملاحـــظات هامة

1) إذا كانت دالة الهدف تدنية و ليس تعظيم نحل بنفس الخطوات تماما لكن في الجدول الاخير نختار النقطة التى تعطي أقل قيمة لدالة الهدف

2) إذا كان القيد في متغير واحد فمثلاً

القيد $x_2 \le 50$ لما يتحول الي معادلة يكون كالتالي $x_2 = 50$ و يرسم مباشرة بدون تعويض حيث يكون عبارة عن خط موازي للمحور x_1 و يقطع المحور x_2 عند القيمة **50**

القيد $x_1 \le 20$ لما يتحول الي معادلة يكون كالتالي $x_2 = 20$ و يرسم مباشرة بدون تعويض حيث يكون عبارة عن خط موازي للمحور x_2 و يقطع المحور x_1 عند القيمة **20**

3) إذا جاء التمرين في شكل تمرين كلامى نقوم باستخراج القيود و دالة الهدف بأسلوب بسيط كما سنوضح في المثال التالي .

مثال2

$$Max \quad z = 150x_1 + 200x_2$$

S.T

$$x_1 \le 60$$

$$x_2 \le 75$$

$$8x_1 + 10x_2 \le 800$$

و شرط عدم السالبية $x_1, x_2 \ge 0$

1) نقوم بتحويل المتباينات إلى معادلات

$$x_1 = 60 \qquad \Rightarrow (1)$$

و ترسم المعادلة السابقة عبارة عن خط موازي للمحور x_2 و يقطع المحور x_1 عند القيمة **60**

$$x_2 = 75 \qquad \Rightarrow (2)$$

و ترسم المعادلة السابقة عبارة عن خط موازي للمحور x_1 و يقطع المحور x_2 عند القيمة **75**

$$8x_1 + 10x_2 = 800 \qquad \Rightarrow (3)$$

و لرسم هذه المعادلة نقوم بعمل التعويض التالي

نفرض ان $x_1 = 0$ و نحسب x_2 كالتالي

$$\Rightarrow 8\times 0 + 10x_2 = 800$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{800}{10} = 80$$

نفرض ان $x_2 = 0$ و نحسب x_1 كالتالي

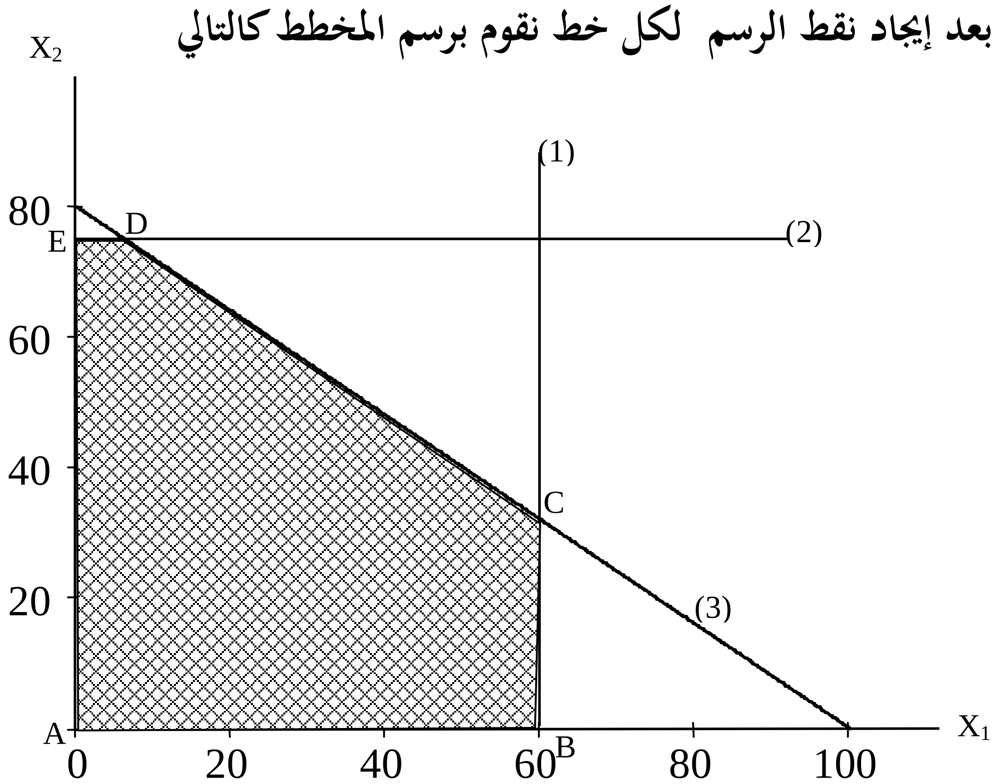
$$\Rightarrow 8x_1 + 10\times 0 = 800$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{800}{8} = 100$$

و نلخص النتائج في الجدول التالي

x_1	**Zero**	**100**
x_2	**80**	**Zero**

2) بعد إيجاد نقط الرسم لكل خط نقوم برسم المخطط كالتالي



3) النقط التي تحيط بمنطقة الحلول هي [A,B,C,D,E]ويكون إحداثي النقط

$A = (0,0) \qquad B = (60,0) \qquad E = (0,75)$

النقطة C هي تقاطع الخطين 1,3 **ولذلك نقوم بحل المعادلتين معاً لحساب النقطة C**

$x_1 = 60 \qquad \Rightarrow (1)$

$8x_1 + 10x_2 = 800 \qquad \Rightarrow (3)$

بالتعويض من 1 في 3 نجد أن

$$8 \times 60 + 10x_2 = 800$$

$$480 + 10x_2 = 800$$

$$\Rightarrow 10x_2 = 800 - 480 = 320$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{320}{10} = 32$$

$$\therefore \quad c = (60,32)$$

و بالمثل عند حساب النقطة D نجد ان

النقطة D هي تقاطع الخطين 2,3 **ولذلك نقوم بحل المعادلتين معاً لحساب النقطة D**

$x_2 = 75 \qquad \Rightarrow (2)$

$8x_1 + 10x_2 = 800 \qquad \Rightarrow (3)$

بالتعويض من 2 في 3 نجد أن

$$8x_1 + 10 \times 75 = 800$$

$$8x_1 + 750 = 800$$

$$\Rightarrow 8x_1 = 800 - 750 = 50$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{50}{8} = 6.25$$

$$\therefore \quad D = (6.25,75)$$

4) نقوم بتصميم الجدول التالي

النقطة الطرفية	دالة الهدف $z = 150x_1 + 200x_2$
$A = (0,0)$ $B = (60,0)$ $C = (60,32)$ $D = (6.25,75)$ $E = (0,75)$	$150 \times 0 + 200 \times 0 = 0$ $150 \times 60 + 200 \times 0 = 9000$ $150 \times 60 + 200 \times 32 = 15400$ $150 \times 6.25 + 200 \times 75 = 15937.5$ $150 \times 0 + 200 \times 75 = 15000$

ثم نختار النقطة التى تعطى اعلي قيمة لدالة الهدف لان دالة الهدف كانت تعظيم و هى النقطة D

$$\therefore \quad x_1 = 6.25 \qquad\qquad x_2 = 75$$

مثال 3

شركة تقوم بإنتاج منتجين A و B في قسمين 1 و 2 والجدول التالي يوضح الوقت المستهلك في كل قسم لتصنع الوحدة من كل نوع و كذلك الطاقة القصوي لكل قسم

القسم	A	B	الطاقة
الاول	12	6	180
الثاني	4	8	96

كما أن ربح الوحدة من A يساوي 20 جنية و ربح الوحدة من B يساوي 16 جنية

المطلوب تحديد عدد الوحدات الواجب إنتاجها من كل منتج أسبوعيا بهدف تعظيم الأرباح

الحـــــــــل

$$Max \quad z = 20x + 16y$$

Subject to (S.T) تحت القيود

$$12x + 6y \le 180$$
$$4x + 8y \le 96$$

$$x, y \ge 0$$ **و شرط عدم السالبية**

نقوم بتحويل المتباينات إلى معادلات

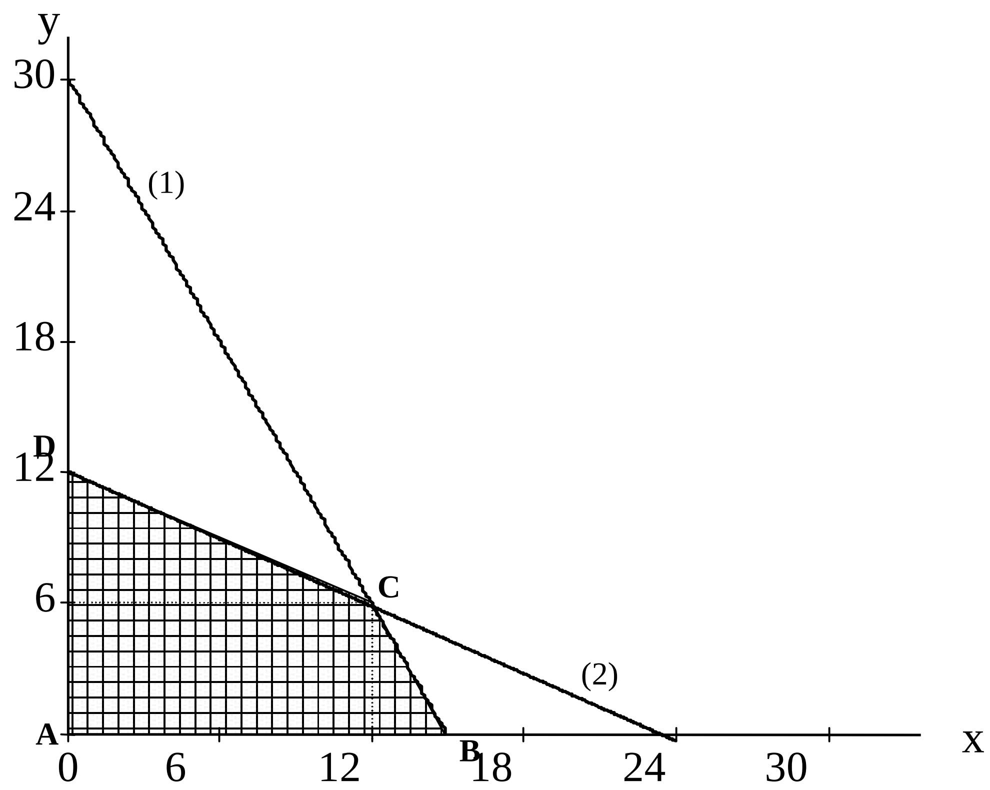
$$12x + 6y = 180 \qquad \Rightarrow (1)$$

x	**0**	**15**
y	**30**	**0**

$$4x + 8y = 96 \qquad \Rightarrow (2)$$

x	**0**	**24**
y	**12**	**0**

بعد إيجاد نقط الرسم لكل خط نقوم برسم المخطط كالتالي



3) النقط التي تحيط بمنطقة الحلول هي [A,B,C,D]ويكون إحداثي النقط

4) نقوم بتصميم الجدول التالي

النقطة	x	y	دالة الهدف $z = 20x + 16y$
A	0	0	$20 \times 0 + 16 \times 0 = 0$
B	15	0	$20 \times 15 + 16 \times 0 = 300$
C	12	6	$20 \times 12 + 16 \times 6 = 366$
D	0	12	$20 \times 0 + 16 \times 12 = 192$

ثم نختار النقطة التى تعطى اعلي قيمة لدالة الهدف لان دالة الهدف كانت تعظيم و هى النقطة C

$$\therefore \quad x = 12 \qquad\qquad y = 6$$

ملحوظة هامة

إذا كان أحد القيود يأخذ علامة يساوي في هذه الحالة يتم رسم باقي القيود و تحديد منطقة الحل الخاصة بهم ثم نحدد نقاط تقاطع الخط الذي يمثل هذا القيد مع المنطقة الخاصة بباقي القيود و تكون نقاط التقاطع هي نقاط الحل الممكنة فقط و لفهم هذه الجزئية نعرض المثال التالي

مثـال 4

أوجد النهاية الصغري لدالة الهدف حيث

$$Min \quad z = 4x_1 + 4x_2$$

S.T

$$x_1 + x_2 \le 24$$

$$3x_1 + x_2 \ge 27$$

$$x_1 - x_2 = 6$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

و شرط عدم السالبية

الحـل

1) نقوم بتحويل المتباينات إلى معادلات

$$x_1 + x_2 = 24 \qquad \Rightarrow (1)$$

و لرسم هذه المعادلة نقوم بعمل التعويض التالي

نفرض ان $x_1 = 0$ و نحسب x_2 كالتالي

$\Rightarrow 0 + x_2 = 24$

$\Rightarrow x_2 = 24$

نفرض ان $x_2 = 0$ و نحسب x_1 كالتالي

$\Rightarrow x_1 + 0 = 24$

$\Rightarrow x_1 = 24$

و نلخص النتائج في الجدول التالي

x_1	**Zero**	**24**
x_2	**24**	**Zero**

$$3x_1 + x_2 = 27 \qquad \Rightarrow (2)$$

و لرسم هذه المعادلة نقوم بعمل التعويض التالي

نفرض ان $x_1 = 0$ و نحسب x_2 كالتالي

$\Rightarrow 3 \times 0 + x_2 = 27$

$\Rightarrow x_2 = 27$

نفرض ان $x_2 = 0$ و نحسب x_1 كالتالي

$\Rightarrow 3x_1 + 0 = 27$

$\Rightarrow x_1 = \frac{27}{3} = 9$

و نلخص النتائج في الجدول التالي

x_1	**Zero**	**9**
x_2	**27**	**Zero**

$$x_1 - x_2 = 6 \qquad \Rightarrow (3)$$

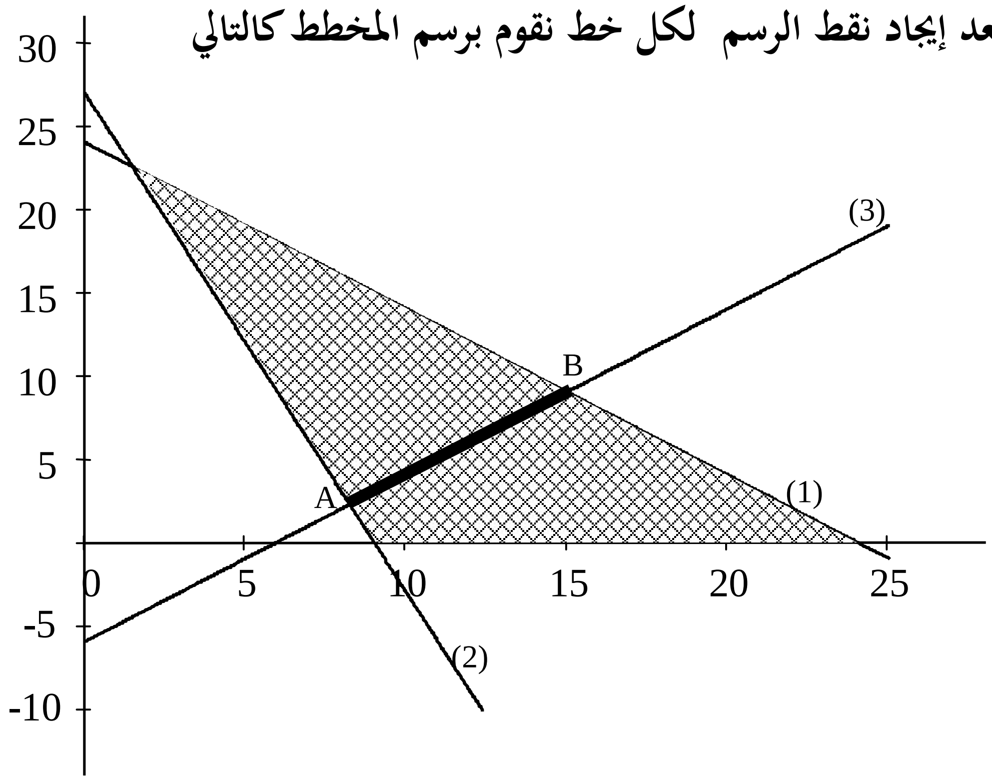
و لرسم هذه المعادلة نقوم بعمل التعويض التالي

نفرض ان $x_1 = 0$ **و نحسب** x_2 **كالتالي** $\Rightarrow 0 - x_2 = 6$ $\Rightarrow x_2 = -6$	**نفرض ان** $x_2 = 0$ **و نحسب** x_1 **كالتالي** $\Rightarrow x_1 - 0 = 6$ $\Rightarrow x_1 = 6$

و نلخص النتائج في الجدول التالي

x_1	**Zero**	**6**
x_2	**-6**	**Zero**

2) بعد إيجاد نقط الرسم لكل خط نقوم برسم المخطط كالتالي



لاحظ اننا حددنا المنطقة المشتركة بين القيد الاول و الثاني ثم رسمنا خط القيد الثالث فقطع المنطقة المظلله عند النقاط A , B و بالتالي تعتبرها نقاط الحلول الممكنة فقط

لاحظ اننا رسمنا الجزء السالب لوجود قيمة سالبة في التعويض لكن لاحظ ان التظليل لم ينزل في المنطقة السالبة لانها ليس ضمن منطقة الحل

النقطة A هي تقاطع الخطين $2,3$ ولذلك نقوم بحل المعادلتين معاً لحساب النقطة A

$$3x_1 + x_2 = 27 \qquad \Rightarrow (2)$$
$$x_1 - x_2 = 6 \qquad \Rightarrow (3)$$

و بالجمع ينتج أن

$$3x_1 + \cancel{x_2} = 27$$
$$x_1 - \cancel{x_2} = 6$$

$$4x_1 = 33$$
$$\Rightarrow x_1 = \frac{33}{4} = 8.25$$

و بالتعويض عن x_1 في أي معادلة و لتكن الثانية نجد أن

$$8.25 - x_2 = 6$$
$$\Rightarrow x_2 = 8.25 - 6 = 2.25$$
$$\therefore \ A = (8.25, 2.25)$$

النقطة B هي تقاطع الخطين $1,3$ ولذلك نقوم بحل المعادلتين معاً لحساب النقطة B

$$x_1 + x_2 = 24 \qquad \Rightarrow (1)$$
$$x_1 - x_2 = 6 \qquad \Rightarrow (3)$$

و بالجمع ينتج أن

$$x_1 + \cancel{x_2} = 24$$
$$x_1 - \cancel{x_2} = 6$$

$$2x_1 = 30$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{30}{2} = 15$$

و بالتعويض عن x_1 في أي معادلة و لتكن الثانية نجد أن

$$15 - x_2 = 6$$

$$\Rightarrow x_2 = 15 - 6 = 9$$

$$\therefore\ \mathrm{A} = (15,9)$$

4) نقوم بتصميم الجدول التالي

النقطة الطرفية	دالة الهدف $z = 4x_1 + 4x_2$
$A = (8.25, 2.25)$ $B = (15,9)$	$4 \times 8.25 + 4 \times 2.25 = 42$ $4 \times 15 + 4 \times 9 = 96$

ثم نختار النقطة التى تعطى اقل قيمة لدالة الهدف لان دالة الهدف كانت تدنية و هى النقطة A

$$\therefore\quad x_1 = 8.25 \qquad\qquad x_2 = 2.25$$

تمارين

السؤال الاول

باستخدام الحل البياني لنماذج البرمجة الخطية أوجد قيم x_1, x_2 التي تعظم الدالة z حيث

$$Max \quad z = 30x_1 + 20x_2$$

Subject to (S.T) تحت القيود

$$3x_1 + 2x_2 \le 36 \quad , \quad x_1 + 3x_2 \ge 9 \quad , \quad x_1 \le 11$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

السؤال الثاني

باستخدام الحل البياني لنماذج البرمجة الخطية أوجد الكميات المثلي x_1, x_2 التي النهاية الصغري للدالة z حيث

$$Min \quad z = 5x_1 + 6x_2$$

Subject to (S.T) تحت القيود

$$x_1 + 2x_2 \le 10 \quad , \quad 3x_1 + 2x_2 \ge 6$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

السؤال الثالث

اوجد النهاية العظمى لدالة الهدف باستخدام الطريقة البيانية للحل الامثل حيث أن دالة الهدف هى

$$Max \quad z = 70x_1 + 50x_2$$

Subject to (S.T) تحت القيود

$$4x_1 + 4x_2 \le 120 \quad , \quad 2x_1 + x_2 \le 40$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

طريقة تشغيل برنامج (Tora)

1- حمل البرنامج Tora للكمبيوتر .

2- تظهر لك شاشة Tora .

ثم أضغط على أي مفتاح و ليكن Enter.

3- تظهر لك شاشة بالخيارات التالية :

Linear Programming أي البرمجة الخطية.

Transportation Model أي نموذج النقل.

Network Models أي شبكات الأعمال.

Integer Programming أي البرمجة الرقمية.

Queuing Analysis أي تحليل الصفوف.

Histogram/Forcasting أي التنبؤ .

Inventory Models أي نماذج التخزين .

أشر على الخيار الذي تريده من خلال استخدام السهم إلى الأعلى أو إلى الأسفل ، و في الحالة الراهنة ، اختر البرمجة الخطية ، ثم أضغط Enter لتظهر لك على نفس الشاشة من جهة اليمين خيارين وهما :

" Read An Existing Data File " قراءة بيانات تم تخزينها سابقاً .

" Enter New Problem " إدخال بيانات جديدة .

ثم تختار الخيار الثاني " إدخال بيانات جديدة " من خلال استخدام السهم إلى الأعلى أو إلى الأسفل ثم أضغط Enter ، فتظهر لك شاشة جديدة.

4- تحتوي هذه الشاشة على العناصر التالية :

" Problem Title " أي عنوان للمسألة ، فيتم إدخال عنوان المسألة.

" nbr of Variables " أي عدد المتغيرات القرارية ، فيتم إدخال عدد متغيرات المسألة القرارية.

" nbr of Constriants " أي عدد القيود ، فيتم إدخال عدد قيود المسألة ثم نضغط tab.

5- ثم تظهر لك شاشة كتابة دالة الهدف علماً بأن عدد المتغيرات القرارية سيكون كما تمت كتابته في البند "4". فلو كان عدد المتغيرات ثلاث ستظهر كالتالي :

Obj. Function Max/Min X_1 X_2 X_3

وحيث أن :

Obj. Function أي دالة الهدف.

Max/Min أي تعظيم أم تخفيض .

X_1 أي المتغير القراري الأول.

X_2 أي المتغير القراري الثاني.

X_3 أي المتغير القراري الثالث.

ثم أدخل قيم معاملات دالة الهدف ونوعها (تعظيم أم تخفيض) ثم أضغط Enter لتظهر لك شاشة قيود المسألة علماً بأن عددها سيكون كما تمت كتابته في البند " 4 ". فلو كان عدد القيود ثلاثة ستظهر كالتالي :

Constraint 1 X_1 X_2 X_3 < = > RHS

وحيث أن :

Constraint 1 أي القيد الأول.

X_1 أي قيمة معامل المتغير القراري X_1 في القيد الأول.

X_2 أي قيمة معامل المتغير القراري X_2 في القيد الأول.

X_3 أي قيمة معامل المتغير القراري X_3 في القيد الأول.

< = > أي نوع متراجحة أو معادلة القيد.

RHS أي قيم الطرف الأيسر لمتراجحة أو معادلة القيد.

ثم أدخل قيم معاملات القيود الثاني والثالث ثم أضغط F8 ليظهر لك السؤال التالي :

Do you wish to save this (new or modified) set of data (y/n)?

أي هل تريد حفظ هذه البيانات ، فتختار إما نعم أو لا.

6 – ثم تظهر لك شاشة بها أربع خيارات و هي :

" solve problem " أي حل المسألة.

" modify data " أي إحداث تغيير في البيانات.

" view data " أي التأكد من صحة البيانات المدخلة .

" print data " أي طباعة البيانات.

7- ثم اختر الخيار المناسب من خلال استخدام Enter.

8- ثم تظهر لك على نفس الشاشة بديلان وهما :

Automated Procedure أي الطريقة الآلية.

User-guided Procedure أي الطريقة غيرالآلية (اليدوية).

ثم أضغط Enter لتختار البديل المناسب (الأول)

9- ثم تظهر لك شاشة بها سبع خيارات وهم :

View solution أي تصفح الحل.

Print solution أي طباعة الحل.

Obtain alternative optimum أي الحصول على حل أمثل آخر.

View optimum tableau أي تصفح جدول الحل الأمثل.

Print optimum tableau أي طباعة جدول الحل الأمثل.

View original data أي تصفح المعلومات الأساسية.

Print original data أي طباعة المعلومات الأساسية.

اختر منها ما تريد من خلال استخدام Enter.

مثـــــال 1 [1]

$$
\begin{array}{lll}
\text{Max.}Z = 5X_1 + 7X_2 & & \\
\text{S.T.} \quad 5X_1 - 2X_2 \geq 10 & & (1) \\
X_1 + X_2 \geq 5 & & (2) \\
-3X_1 + 6X_2 \leq 6 & & (3) \\
8X_1 + 10X_2 \leq 80 & & (4) \\
X_1 \leq 8 & & (5) \\
X_1 , X_2 \geq 0 & &
\end{array}
$$

للحصول على الحل البياني باستخدام حزمة TORA نتبع الخطوات التالية:

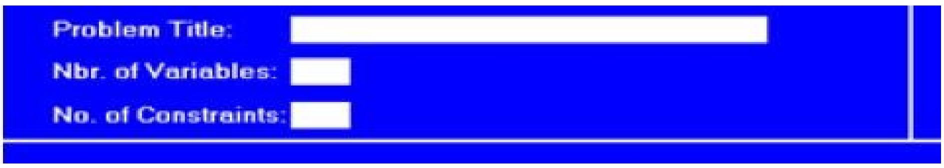
الخطوة (١): ١- يتم فتح القائمة الرئيسية Menu

من القائمة نختار Linear Programming

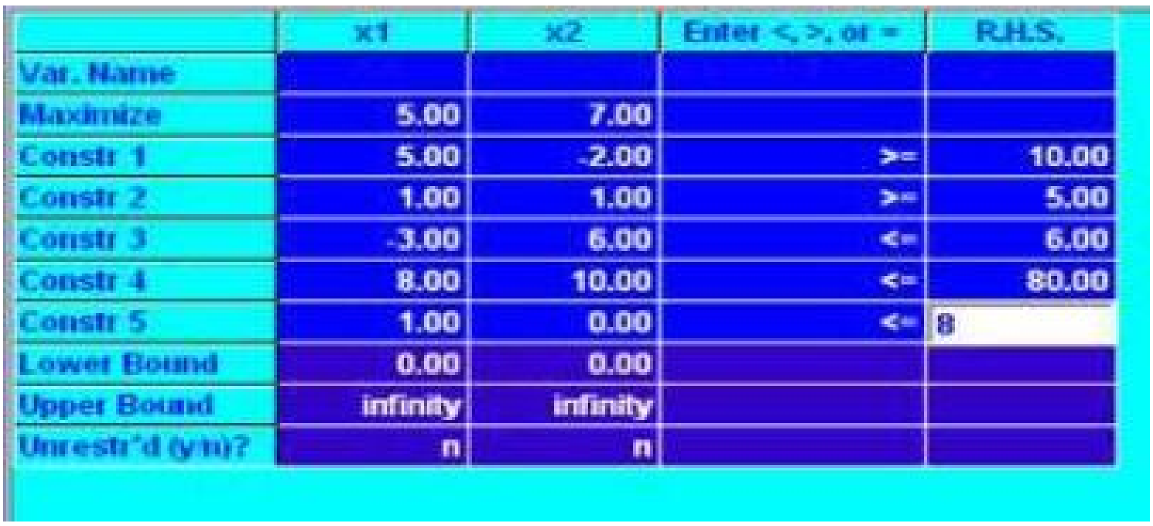
[1] - د.عفاف الدش ، **بحوث العمليات و أتخاذ القرارات، الجزء الاول ، الطبعة الثانية**، الناشر (مكتبة عين شمس) ، القاهرة ، 2012.

فتظهر الشاشة التالية

كون المثال غير مخزن نختار **Enter New Problem** ونختار نوع الارقام **Decimal Notation** ثم يتم الضغط علي "**Go To Input Screen** "

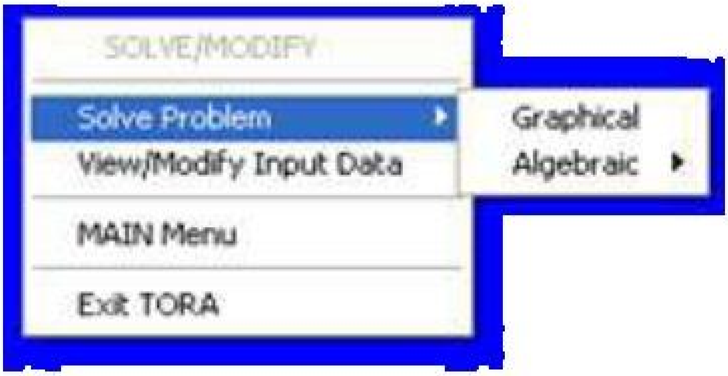


فنقوم بإدخال عنوان المسألة"**Problem Title** " ثم ندخل عدد المتغيرات"**nbr of Variables**" 2 و ندخل عدد القيود"**nbr of Constriants** " 5 ثم الضغط علي مفتاح **tab** من لوحة المفاتيح

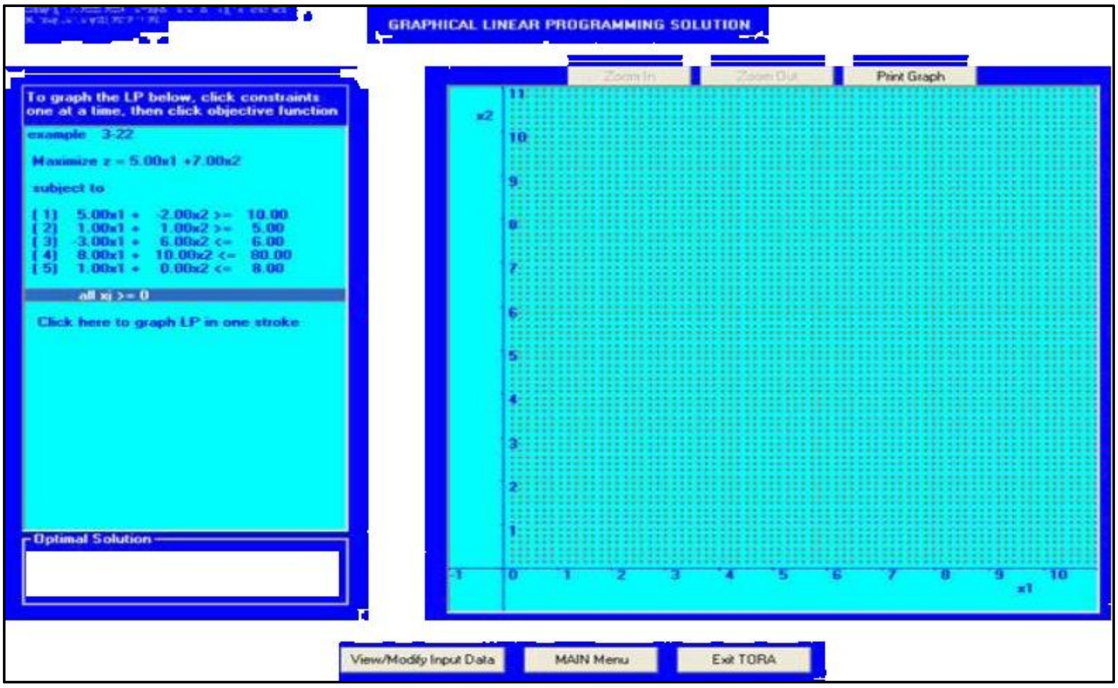


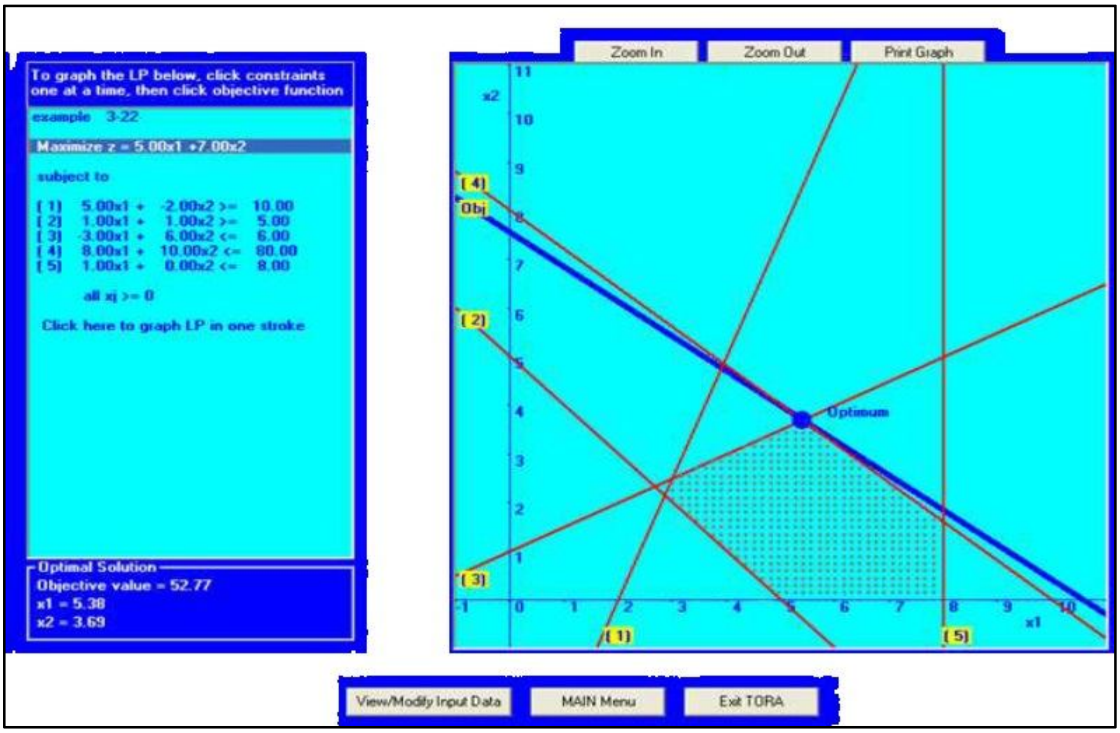
	x1	x2	Enter <, >, or =	R.H.S.
Var. Name				
Maximize	5.00	7.00		
Constr 1	5.00	-2.00	>=	10.00
Constr 2	1.00	1.00	>=	5.00
Constr 3	-3.00	6.00	<=	6.00
Constr 4	8.00	10.00	<=	80.00
Constr 5	1.00	0.00	<=	8
Lower Bound	0.00	0.00		
Upper Bound	infinity	infinity		
Unrestr'd (y/n)?	n	n		

يتم إدخال معاملات دالة الهدف تحديد نوعها **Max/Min** ثم كتابة معاملات القيود بالترتيب و تحديد علامة كل قيد اكبر او يساوي او اقل اويساوي و احياناً يساوي و كتابة الطرف الايمن لكل قيد و باقي البيانات وخصوصاً اخر ثلاثة سطورتظل كما هي ثم نضغط علي **solve problem**



ثم نختار من القائمة الفرعية الحل البياني **Graphical**فيظهر الحل و الرسم و النتيجة النهائية كالتالي





وبالتالي يكون الحل الامثل هو

$$z = 52.77 \qquad x_1 = 5.38 \qquad x_2 = 3.69$$

الفصل الثالث

طريقة السمبلكس [الحل الجبري للبرنامج الخطي]

قبل أن ندخل في تفاصيل هذه الطريقة لابد من التفريق بين النموذج المعياري و النموذج غير المعياري

أ) النموذج المعياري

هو النموذج الذي تتحقق فيه الشروط التالية

- دالة الهدف دالة أرباح
- جميع القيود لها إشارة [أقل من او يساوي]
- جميع الطاقات (الطرف الايمن للمتباينات) موجبة

ب) النموذج غير المعياري

هو النموذج الذي يختل فيه شرط من الشروط الثلاثة السابق شرحها

و نلاحظ أن أسلوب السمبلكس الذي سوف نقوم بشرحه لا يتعامل إلا مع نماذج البرمجة الخطية المعيارية

تعتمد طريقة السمبلكس علي جعل كل المتباينات بالبرنامج الخطي عبارة معادلات فمثلاً : إذا كان القيد يحمل إشارة [$\leq$] فإننا نضيف متغير في جانب المتغيرات للقيد يعبر عن الجزء غير المستفاد منة في القيد و يسمي المتغير الفائض أو الراكد فمثلاً القيد

نضيف متغير و ليكن s_1 للطرف الأيمن و نحول المتباينة إلي معادلة كالتالي :

و تعتمد طريقة الحل علي البدء بحل أساسي ممكن ثم الانتقال إلي حل أساسي ممكن مجاور له بحيث أن هذا الحل الجديد يحسن من قيمة دالة الهدف وسوف نبدأ الحل من الحل المبدئي [نقطة الأصل].

و لفهم خطوات الحل تفصيلاً نقوم بعرض المثال التالي

مثـــال

للبرنامج الخطي التالي

تعظيم دالة الهدف $z = 4x_1 + 3x_2$

تحت قيود

$$x_1 \leq 4000$$

$$x_2 \leq 6000$$

$$x_1 + \frac{2}{3}x_2 \leq 700$$

شرطي عدم السالبية

$$x_1, x_2 \geq 0$$

والمطلوب تطبيق خطوات السمبلكس للوصول إلي الحل الامثل

خطوات الحـل

1) نضيف متغيرات راكدة [عاطلة]عددها ثلاثة للمتباينات الثلاثة لتحويلها إلي معادلات ثم نضيفها في دالة الهدف .

$$\begin{aligned} x_1 + \quad s_1 \quad &= 4000 \\ x_2 \quad + s_2 \quad &= 6000 \\ x_1 + \frac{2}{3}x_2 \quad + s_3 &= 6000 \end{aligned}$$

لاحظ أننا

أضفنا للمعادلة الأولى s_1 و للمعادلة الثانية s_2 و للمعادلة الثالثة s_3 ونلاحظ أن المتغير الراكد يكون معاملة الواحد الصحيح في معادلته و صفر في باقي المعادلات

ونلاحظ أن معامل هذه المتغيرات في دالة الهدف هو الصفر و بالتالي تكون دالة الهدف كالتالي

$$z = 4\,x_1 + 3\,x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$$

و نقوم بتحويل دالة الهدف لمعادلة صفرية تكون كالتالي

$$z - 4\,x_1 - 3\,x_2 - 0s_1 - 0s_2 - 0s_3 = 0$$

ثم نكتب جميع المعادلات في جميع المتغيرات كالتالي

$$z - 4\,x_1 - 3\,x_2 - 0s_1 - 0s_2 - 0s_3 = 0$$

$$0z + x_1 + 0x_2 + s_1 + 0s_2 + 0s_3 = 4000$$

$$0z + 0x_1 + x_2 + 0s_1 + s_2 + 0s_3 = 6000$$

$$0z + x_1 + \frac{2}{3}x_2 + 0s_1 + 0s_2 + s_3 = 6000$$

و تصبح شروط عدم السالبية كالتالي

$$x_1\,, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

2) نفترض أن نقطة الحل المبدئي هي نقطة الأصل أي أن

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0$$

و بالتعويض في المعادلات الأربع السابقة نجد أن

$$z - 0s_1 - 0s_2 - 0s_3 = 0$$

$$0z + s_1 + 0s_2 + 0s_3 = 4000$$

$$0z + 0s_1 + s_2 + 0s_3 = 6000$$

$$0z + 0s_1 + 0s_2 + s_3 = 6000$$

و نلاحظ الآن أن عدد المتغيرات المجهولة اصبح يساوي عدد المعادلات وتسمي الطريقة السابقة بطريقة تحديد المجموعة

و تكتب المعادلات في شكل مصفوفات كالتالي

$$[z \quad s_1 \quad s_2 \quad s_3]\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 4000\\ 6000\\ 6000\end{bmatrix}$$

حيث أن المصفوفة التي في يسار المعادلة تسمي مصفوفة الأساس أو مصفوفة الوحدة

و تصبح مجموعة الحل هي

$$x_1 = 0, x_2 = 0, s_1 = 4000, s_2 = 6000, s_3 = 6000, z = 0$$

3) للانتقال إلي نقطة حل جديدة لابد من تحديد متغير غير أساسي يدخل للحل و متغير أساسي يخرج من الحل

المتغير الغير الأساسي ←الذي قيمته تساوي صفر في الحل السابق $\{x_1, x_2\}$

المتغير الأساسي ←الذي قيمته لا تساوي صفر في الحل السابق $\{s_1, s_2, s_3, z\}$

و لابد أن يكون المتغير الداخل للحل هو المتغير الذي يصنع أفضل تحسين علي دالة الهدف

و المتغير الخارج يكون هو المتغير الأسرع وصولاً للصفر و سوف نوضح هذه النقطة عند التعامل مع جدول السمبلكس

4) نصمم الجدول المبدئي[المصفوفة المبدئية] للسمبلكس

حيث نقوم بكتابة المعادلات الأربع في شكل جدول كما هو موضح بالشكل التالي و يسمي الجدول بالمصفوفة الأولى

Ratios θ	Basic variable	Coefficient of:						Right side
		Z						
------	Z	1	-3	-4	0	0	0	0
$\frac{4000}{0}=\infty$	S_1	0	1	0	1	0	0	4000
$\frac{6000}{1}=6000$	S_2	0	0	1	0	1	0	6000
$\frac{6000}{\frac{2}{3}}=9000$	S_3	0	1		0	0	1	6000

❖ نلاحظ أن الجدول السابق هو عبارة عن تفريغ للمعادلات الأربع السابقة و وضع في عمود المتغيرات الاساسية المتغيرات التي لها حل عند نقطة الأصل$\{s_1, s_2, s_3, z\}$ و الأعمدة التي تليه هي عبارة قيم معاملات كل متغير في الأربع معادلات

❖ لاحظ أن مصفوفة الوحدة السابقة الذكر لابد أن تكون موجودة بالجدول المبدئي و الجداول التالية له ففي هذا الجدول هي عبارة عن الأعمدة $\{s_1, s_2, s_3, z\}$و تسمي هذه الأعمدة بالمتغيرات المنعزلة أي التي لا تتغير بتغير الحل .

يتم معرفة هل الحل السابق حل امثل أم لا عن طريق الصف الثاني[صف z] حيث انه إذا وجدت بهذا الصف قيم سالبة دل ذلك علي أن الحل ليس حل أمثل و لابد من الانتقال إلي حل أخر مجاور كالتالي.

أولاً نحدد متغير داخل للحل و هو المتغير الذي يحسن الحل افضل من غيره و هو المتغير صاحب اكبر قيمة سالبة في الصف الثاني [صف z] و يسمي العمود الموجود به هذه القيمة بعمود القطب و هو العمود الرابع [العمود المظلل] و بالتالي المتغير الداخل للحل هو المتغير المظلل بالعمود

$\therefore$ **المتغير الداخل للحل** = x_2

ثانياً نحدد متغير خارج و لمعرفة المتغير الخارج نحسب ما يسمي بالنسبة θ [ثيتا] لكل صف كالتالي

$$\theta = \frac{\text{القيمة الموجودة بعمود الحل}}{\text{القيمة الموجودة بالعمود القطب}}$$

لاحظ أنه لا يتم حساب النسبة لصف z

ثم نختار المتغير الموجود بالصف صاحب اقل قيمة موجبة للنسبةθ لأنة يعتبر المتغير الأسرع وصولا للصفر ليكون هو المتغير الخارج و نظلل هذا الصف و يسمي الصف القطب

∴ **المتغير الخارج =** s_2

و يكون تقاطع الصف المظلل مع العمود المظلل يسمي المفتاح

∴ **المفتاح = 1**

5) نصمم جدول أخر لنقطة حل جديدة

مع ملاحظة دخول القيمة x_2مكان القيمة s_2 في عمود المتغيرات الاساسية و يكون الجدول المجاور كالتالي

Ratios θ	**Basic variable**	**Coefficient of:**						**Right side**
		Z						
------	**Z**	**1**	**-3**	**0**	**0**	**4**	**0**	**24000**
$\frac{4000}{1}$ =4000		**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**4000**
$\frac{6000}{0} = \infty$		**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**6000**
$\frac{2000}{1} = 2000$		**0**	**1**		**0**	**-$\frac{2}{3}$**	**1**	**2000**

و يسمي كل جدول بالمصفوفة و بالتالي يسمي الجدول السابق بالمصفوفة الثانية و تم ملء خاناته كالتالي

أ) قيم الصف المناظر لصف القطب [الصف قبل الأخير بالجدول الجديد]

$$\textbf{قيمة الصف المصفوفة الثانية} = \frac{\textbf{الصف القطب بالجدول الاول}}{\textbf{المفتاح الموجود بالجدول الأول}}$$

x_2 = [0 0 1 0 1 0 6000]

÷

[1 1 1 1 1 1 1]

=

[0 0 1 0 1 0 6000]

ب) تحسب باقي الصفوف بالجدول بأسلوب الحذف الجاوسياني حيث نجعل معامل المتغير الداخل في معادلته واحد و في باقي المعادلات أصفار كالتالي

(الصف بالجدول الجديد) = (الصف بالجدول السابق) - (العدد المظلل في الصف المراد حسابه) × (الصف بالجدول الجديد الموجود مكان صف القطب)

أولاً : لصف z

z = [1 −3 −4 0 0 0 0]

-

(-4) [0 0 1 0 1 0 6000]

=

[1 −3 0 0 −4 0 24000]

ثانياً : لصف s_1

s_1 = [0 1 0 1 0 0 4000]

-

(0) [0 0 1 0 1 0 6000]

=

[0 1 0 1 0 0 4000]

ثالثاً : لصف s_3

$s_3 = \left[0 \quad 1 \quad \frac{2}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 6000\right]$

-

$(\frac{2}{3})$ [0 0 1 0 1 0 6000]

=

$\left[0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{2}{3} \quad 1 \quad 2000\right]$

ملحوظة هامة : لابد أن تكون مصفوفة الوحدة موجودة بكل مصفوفة ولكن مع تحرك الأعمدة فنلاحظ في المصفوفة الثانية أنها هي الأعمدة $\{s_3, x_2, s_1, z\}$و نلاحظ أنها اختلفت عن الجدول الأول في دخول x_2 مكان s_2 و هذا يؤكد صح الخطوة السابقة

و تكون قيمة الحل السابق هي

$x_1 = 0, x_2 = 6000, s_1 = 4000, s_2 = 0, s_3 = 2000, z = 24000$

لاحظ أن قيم الحلول تؤخذ من عمود الحل بالمصفوفة و الغير موجود بالعمود تكون قيمته تساوي صفر

نلاحظ أن الحل السابق غير امثل لوجود قيمة سالبة في الصف الثاني [صف z] و لابد من الانتقال إلي حل أخر مجاور بنفس الخطوات السابقة كالتالي.

نحدد متغير داخل للحل و هو المتغير الذي يحسن الحل افضل من غيره و هو المتغير صاحب اكبر قيمة سالبة في الصف الثاني [صف z] و يسمي العمود الموجود به هذه القيمة بعمود القطب و هو العمود الثالث [العمود المظلل] و بالتالي المتغير الداخل للحل هو المتغير المظلل بالعمود

∴ المتغير الداخل للحل = x_1

و لمعرفة المتغير الخارج نحسب ما يسمي بالنسبة θ [ثيتا] لكل صف كالتالي

$$\theta = \frac{\text{القيمة الموجودة بعمود الحل}}{\text{القيمة الموجودة بالعمود القطب}}$$

ثم نختار المتغير الموجود بالصف صاحب اقل قيمة موجبة للنسبةθ لأنة يعتبر المتغير الأسرع وصولا للصفر ليكون هو المتغير الخارج و نظلل هذا الصف و يسمي الصف القطب

∴المتغير الخارج =s_3

و يكون تقاطع الصف المظلل مع العمود المظلل يسمي المفتاح

∴ المفتاح = 1

6) نصمم مصفوفة أخرى لنقطة حل جديدة

مع ملاحظة دخول القيمة س$_1$مكان القيمة س$_5$ في الصف و يكون الجدول كالتالي

Basic variable	Coefficient of:						Right side
	Z						
Z	1	0	0	0	2	3	24000
	0	0	0	1		-1	4000
	0	0	1	0	1	0	6000
	0	1		0	$-\frac{2}{3}$	1	2000

و تم ملء خانات المصفوفة السابقة بنفس الخطوات السابق ذكرها عند الانتقال من الجدول الاول إلي الجدول الثاني هي كالتالي

أ) قيم الصف المناظر لصف القطب [الصف الأخير]

$$\text{قيمة الصف المصفوفة الثانية} = \frac{\text{الصف القطب بالجدول الاول}}{\text{المفتاح الموجود بالجدول الأول}}$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 2000 \end{bmatrix}$$

$\div$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$=$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 2000 \end{bmatrix}$$

ب) تحسب باقي الصف بالجدول بأسلوب الحذف الجاوسياني حيث نجعل معامل المتغير الداخل في معادلته واحد و في باقي المعادلات أصفار كالتالي

أولاً : لصف z

$$z = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 4 & 0 & 24000 \end{bmatrix}$$

-

$$(-3)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 2000 \end{bmatrix}$$

$=$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 30000 \end{bmatrix}$$

ثانياً : لصف $\boldsymbol{s_1}$

$\boldsymbol{s_1}$= [0 1 0 1 0 0 4000]

-

(1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 2000 \end{bmatrix}$

=

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -1 & 2000 \end{bmatrix}$

ثالثاً : لصف $\boldsymbol{x_2}$

$\boldsymbol{x_2}$= [0 0 1 0 1 0 6000]

-

(0) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 2000 \end{bmatrix}$

=

[0 0 1 0 1 0 6000]

و تكون قيمة الحل السابق هي

$x_1 = 2000, x_2 = 6000, s_1 = 2000, s_2 = 0, s_3 = 0, z = 30000$

و الحل السابق حل أمثل لان صف z أصبح لا توجد به قيم غير سالبة

<u>ملاحظات هامة</u>

s_1 متغير راكد يخص القيد الأول وقيمته في الحل الأمثل $s_1 = 2000$ أي أن هذا القيد غير مستغل بالكامل و بالتالي فهو قيد غير حاكم

s_2 متغير راكد يخص القيد الثاني وقيمته في الحل الأمثل $s_2 = 0$ أي أن هذا القيد مستغل بالكامل و بالتالي فهو قيد حاكم

s_3 متغير راكد فرض للقيد الثالث وقيمته في الحل الأمثل $s_3 = 0$ أي أن هذا القيد مستغل بالكامل و بالتالي فهو قيد حاكم

التفسير العلمي لخطوات السمبلكس

1) نضيف متغيرات راكدة للقيود لكي تتحول إلي معادلات

2) لحل هذه المعادلات آنيا نلجأ إلي أسلوب تحديد المجموعة بجعل الفرق بين عدد المتغيرات و عدد المعادلات يساوي صفر و بذلك تصبح المتغيرات الصفرية متغيرات غير أساسية و تلك صاحبة القيم الموجبة هي المتغيرات الأساسية و هذا التصرف يجعلنا نحصل علي مصفوفة الأساس [مصفوفة الوحدة] حيث يسهل قراءة الحل مباشرة .

3) من أجل تحسين دالة الهدف علينا الانتقال من جدول لأخر و هذا يتطلب عملية إبدال بين متغير أساسي و أخر غير أساسي .

4) و لاختيار المتغير غير الأساسي المرشح للدخول نبحث عن ذلك المتغير الذي يحسن دالة الهدف أكثر من غيرة و هو المتغير صاحب القيمة الأعلى سالبيه في الصف [z]

5) و لتحديد المتغير المرشح للخروج علينا البحث عن المتغير الذي يصل إلي الصفر قبل غيرة مع تزايد قيمة المتغير الداخل و لذلك نختار المتغير ذو القيمة ثيتا الموجبة الأدنى [خارج قسمة قيمة الحل للمعادلات علي معاملات عمود المتغير الداخل أي العمود القطب]

6) لجعل المتغير الداخل ضمن مجموعة متغيرات الأساس يلزم أن نجعل معاملة في معادلته الواحد الصحيح [و يتم ذلك بقسمة صف المتغير الخارج (صف القطب) علي المفتاح]فضلاً عن ضرورة جعل معاملات المتغير في الصفوف الأخرى يعادل الصفر و هذا من خلال تطبيق الحذف الجاوسياني.

7) نكرر المنطق السابق مع كل عملية انتقال من جدول لأخر و نتوقف عندما لا يوجد متغير يمكن تحسينه في دالة الهدف [الصف ح ليس به قيم سالبة]

تمـــرين

شركة تقوم بإنتاج منتجين A و B في قسمين 1 و 2 و تبلغ الطاقة القصوى للقسمين 40 و 120ساعة عمل مباشر علي التوالي . يحتاج تصنيع الوحدة من A ساعتين في القسم 1 و 4 ساعات في قسم 2 و يحتاج تصنيع الوحدة من B إلي 4 ساعات في القسم 1 و 4ساعات في قسم 2 و ربح الوحدة من س يساوي 70 جنية و ربح الوحدة من ص يساوي 50 جنية

المطلوب استخدام أسلوب السمبلكس في تحديد الحل الأمثل

الحـــــــــل

للتبسيط نصمم الجدول التالي

القيود	x_1	x_2	الطاقة
قسم 1	2	1	40
قسم 2	4	4	120
ربح الوحدة	70	50	

نفرض أن x_1 **هي عدد الوحدات المنتج من النوع A**

x_2 **هي عدد الوحدات المنتج من النوع B**

تعظيم دالة الهدف $z = 70\,x_1 + 50\,x_2$

تحت قيود

$2x_1 + x_2 \leq 40$

$4x_1 + 4x_2 \leq 120$

شرطي عدم السالبية

$x_1\,, x_2 \geq 0$

1) نضيف متغيرات راكدة [عاطلة]عددها 2 للمتباينات لتحويلها إلي معادلات ثم نضيفها في دالة الهدف .

$2x_1 + x_2 + s_1 \qquad = 40$

$4x_1 + 4x_2 \quad + s_2 = 120$

بالتالي تكون دالة الهدف كالتالي

$z = 70\,x_1 + 50\,x_2 + 0s_1 + 0s_2$

و نقوم بتحويل دالة الهدف لمعادلة صفرية تكون كالتالي

$z - 70\,x_1 - 50\,x_2 - 0s_1 - 0s_2 = 0$

ثم نكتب جميع المعادلات في جميع المتغيرات كالتالي

$z - 70\,x_1 - 50\,x_2 - 0s_1 - 0s_2 = 0$

$0z + 2x_1 + \quad x_2 + \quad s_1 + 0s_2 = 40$

$0z + 4x_1 + \quad 4x_2 + 0s_1 + \quad s_2 = 120$

و تصبح شروط عدم السالبية كالتالي

$x_1\,, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

2) نفترض أن نقطة الحل المبدئي هي نقطة الأصل أي أن

$x_1 = 0, \quad x_2 = 0$

و بالتعويض في المعادلات الأربع السابقة نجد أن

$z - 0s_1 - 0s_2 = 0$

$0z + \quad s_1 + 0s_2 = 40$

$0z + 0s_1 + \quad s_2 = 120$

و تكتب المعادلات في شكل مصفوفات كالتالي

$$[z \quad s_1 \quad s_2]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 40 \\ 120 \end{bmatrix}$$

حيث أن المصفوفة التي في يسار المعادلة تسمي مصفوفة الأساس أو مصفوفة الوحدة

و تصبح مجموعة الحل هي

$x_1 = 0, x_2 = 0, s_1 = 40, s_2 = 120, z = 0$

3) للانتقال إلي نقطة حل جديدة لابد من تحديد متغير غير أساسي يدخل للحل و متغير أساسي يخرج من الحل

المتغير الغير الأساسي ←الذي قيمته تساوي صفر في الحل السابق $\{x_1, x_2\}$

المتغير الأساسي ←الذي قيمته لا تساوي صفر في الحل السابق $\{s_1, s_2, z\}$

و لابد أن يكون المتغير الداخل للحل هو المتغير الذي يصنع أفضل تحسين علي دالة الهدف

و المتغير الخارج يكون هو المتغير الأسرع وصولاً للصفر و سوف نوضح هذه النقطة عند التعامل مع جدول السمبلكس

4) نصمم الجدول المبدئي[المصفوفة المبدئية] للسمبلكس

حيث نقوم بكتابة المعادلات الأربع في شكل جدول كما هو موضح بالشكل التالي و يسمي الجدول بالمصفوفة الأولى

Ratios θ	Basic variable	Coefficient of:					Right side
		Z					
------	Z	1	-70	-50	0	0	0
$\frac{40}{2}=20$	S_1	0	2	1	1	0	40
$\frac{120}{4}=30$	S_2	0	4	4	0	1	120

نلاحظ وجود قيم سالبة في [صف Z] و يدل ذلك علي أن الحل ليس حل أمثل و لابد من الانتقال إلي حل أخر مجاور كالتالي.

نحدد متغير داخل للحل المتغير صاحب اكبر قيمة سالبة في الصف الثاني [صف ح] و يسمي العمود الموجود به هذه القيمة بعمود القطب و هو العمود الرابع [العمود المظلل] و بالتالي المتغير الداخل للحل هو المتغير المظلل بالعمود

∴ **المتغير الداخل للحل** = x_1

و لمعرفة المتغير الخارج نحسب ما يسمي بالنسبة θ [ثيتا] لكل صف كالتالي

$$\theta = \frac{\textbf{القيمة الموجودة بعمود الحل}}{\textbf{القيمة الموجودة بالعمود القطب}}$$

ثم نختار المتغير الموجود بالصف صاحب اقل قيمة موجبة للنسبة لأنة يعتبر المتغير الأسرع وصولا للصفر ليكون هو المتغير الخارج و نظلل صفة و يسمي الصف القطب

∴ **المتغير الخارج** = s_1

و يكون تقاطع الصف المظلل مع العمود المظلل يسمي المفتاح

∴ **المفتاح = 2**

4) نصمم جدول أخر لنقطة حل جديدة

مع ملاحظة دخول القيمة x_1 مكان القيمة s_1 في الصف و يكون الجدول كالتالي

Ratios θ	Basic variable	Coefficient of:					Right side
		Z					
------	Z	1	0	-15	35	0	1400
$\frac{20}{\frac{1}{2}}=40$		0	1			0	20
$\frac{40}{2}=20$	S_2	0	0	2	-2	1	40

و تم ملء خانات المصفوفة السابقة بنفس الخطوات السابق ذكرها عند الانتقال من الجدول الاول إلي الجدول الثاني هي كالتالي

أ) قيم الصف المناظر لصف القطب

قيمة الصف المصفوفة الثانية = $\dfrac{\text{الصف القطب بالجدول الاول}}{\text{المفتاح الموجود بالجدول الأول}}$

x_1 = [0 2 1 1 0 40]

÷

[2 2 2 2 2 2]

=

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 20 \end{bmatrix}$

ب) تحسب باقي الصف بالجدول بأسلوب الحذف الجاوسياني حيث نجعل معامل المتغير الداخل في معادلته واحد و في باقي المعادلات أصفار كالتالي

أولاً : لصف z

z = [1 −70 −50 0 0 0]

-

(-70) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 20 \end{bmatrix}$

=

[1 0 −15 35 0 1400]

ثانياً : لصف s_2

s_2 = [0 4 4 0 1 120]

-

(4) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 20 \end{bmatrix}$

=

[0 0 2 −2 1 40]

و تكون قيمة الحل السابق هي

$$x_1 = 20, x_2 = 0, s_1 = 0, s_2 = 40, z = 1400$$

ونلاحظ أن الحل ليس حلاً أمثل و يتم الانتقال إلي جدول مجاور بنفس الخطوات و يكون الجدول المجاور كالتالي

Basic variable	Coefficient of:					Right side
	Z					
Z	1	0	0	20	7.5	1700
	0	1	0			10
	0	0	1	-1		20

و تم حساب أرقام الجدول الجديد بنفس السابقة

و تكون قيمة الحل السابق هي

$$x_1 = 10, x_2 = 20, s_1 = 0, s_2 = 0, z = 1700$$

و يعتبر الحل السابق حل أمثل لعدم وجود قيم سالبة في صف Z

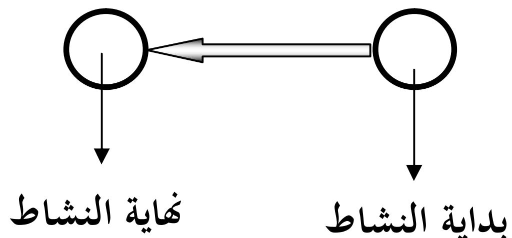
الفصل الرابع

برامج تقييم و مراجعة الاداء [شبكات الاعمال]

من المعلوم أن هناك العديد من المشروعات تتكون من أنشطة متتابعة و متشابكة منها علي سبيل المثال مشاريع البناء و التشييد فنجد أن هناك أنشطة متتابعة مثل حفر الاساسات و عمل الاساسات و بناء الحوائط .... الخ

و بالتالي فإن مثل هذه المشروعات يكون من الضروري تحديد زمن انتهاء المشروع و تكلفة و يهتم موضوع شبكات الأعمال بتحليل مثل هذه المشكلات

أهم مصطلحات شبكات الأعمال

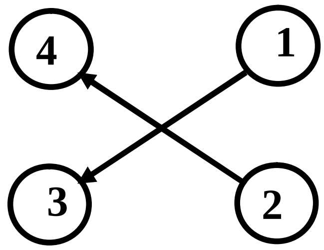
المصطلح	التعريف
1 - النشاط	هو أي عمل يستغرق وقت و جهد و مال ويعبر عنة بسهم رأسه عند دائرة النهاية و زيله عند دائرة البداية 
2 - الحدث	يمثل نقطة بدء النشاط أو نقطة نهايته و يعبر عنة بدائرة عند بداية النشاط و دائرة عند النهاية و نلاحظ أن تتابع الأحداث يكون من اليسار إلى اليمن أو من اليمن إلى اليسار
3 - النشاط الحرج	هو النشاط الذي إذا تأخر يتأخر زمن المشروع كله
4 -المسار الحرج	هو مجموعة الأنشطة الحرجة المتصلة من دائرة البداية لأول نشاط إلى دائرة نهاية آخر نشاط و يكون صاحب أطول مسار (اكبر مدة زمنية) و زمنه الكلي هو اقصر زمن لإنجاز المشروع
6 - النشاط الوهمي	هو نشاط نضيفه للمخطط من اجل إبراز علاقات التتابع أو من اجل إقفال الشبكة و يكون زمنه دائما صفر

قواعد رسم المخطط الشبكي

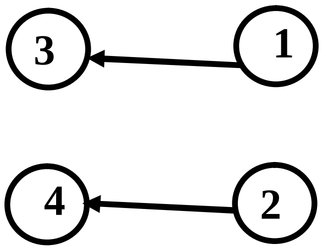
أ – كل أنشطة البداية تخرج من دائرة واحد

ب – كل أنشطة النهاية تنتهي إلى دائرة واحدة

مراعاة عدم تقاطع الخطوط



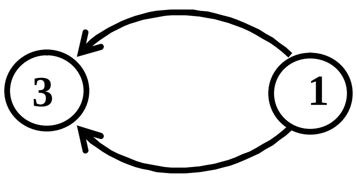
(×)



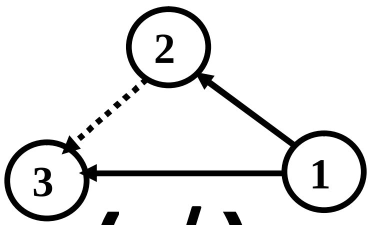
(√)

جـ ممنوع وجود اسهم مرتدة كل الأسهم اتجاها من اليمين إلى اليسار

د – مراعاة عدم وجودة أنشطة متوازية لها نفس البداية و النهاية



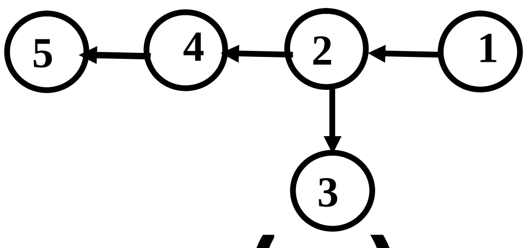
(×)



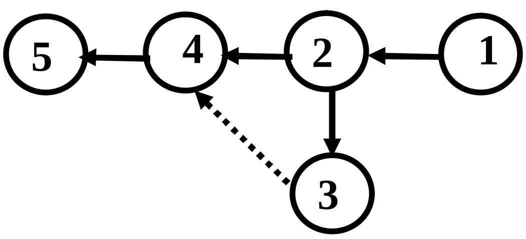
(√)

حيث أن السهم المتقطع يسمي نشاط وهمي زمنه يساوي صفر

و – تجنب وجود أنشطة مدلاه



(×)



(√)

أسلوب تقيم و مراجعة البرامج [PERT]

في أسلوب بيرت زمن يفترض أن لكل نشاط ثلاثة أزمنة و هي

أزمنة النشاط

زمن متفائل [p]	**زمن اكثر شيوعاً [N]**	**زمن متشائم [o]**
في هــذه الحالــة يفــترض الشــــص أن الظـــروف السائدة في أفضل حالاتها	في هـــذه الحالـــة يفـــترض الشخص أن الظروف عادية و طبيعية	في هــذه الحالــة يفــترض الشــــص أن الظـــروف السائدة سيئة و متشائمة

و نلاحظ أن الزمن يتوزع توزيع إحصائي يسمى توزيع بيتا و بالتالي يمكن حساب المتوسط و التباين للزمن باستخدام العلاقات التالية

الزمن المتوقع للنشاط $= \frac{P+4N+O}{6}$

حساب احتمال انتهاء المشروع في زمن معين (X)

في هذه الحالة نقوم بتحويل المتغير (س) إلى متغير (ز) يتوزع طبيعياً باستخدام العلاقة التالية

$$z = \frac{x - E(t)}{\sigma}$$

حيث أن الانحراف المعياري و هو الجزر التربيعي للتباين الكلي

و يحسب التباين الكلي عن طريق جمع التباينات الخاصة بكل الأنشطة الحرجة حيث

التباين لكل نشاط حرج $\sigma^2 = \left(\frac{O-P}{6}\right)^2$

و بعد حساب Z نبحث عنها في جدول التوزيع الطبيعي z لمعرفة قيمة الاحتمال مع ملاحظة انه لو كانت قيمة Z سالبة نبحث عن القيمة الموجبة بالجدول ثم بعد إيجادها نطرحها من الواحد الصحيح

مثـــــــال

ترغب أحد الشركات في تخطيط البرنامج الزمني لإنشاء أحد مشروعاتها الجديدة و كانت البينات المتاحة هي

النشاط	المسار	أزمنة النشاط		
		متفائل	اكثر احتمالاً	متشائم
A	2 - 1	2	3	4
B	3 - 1	4	5	6
C	4 - 2	3	4	5
D	5 - 3	5	6	7
E	6 - 4	2	4	6
F	6 - 5	5	7	9
G	7 - 6	5	6	7
K	8 - 6	3	4	5
L	9 - 7	4	7	10
M	9 - 8	2	4	6

و المطلوب

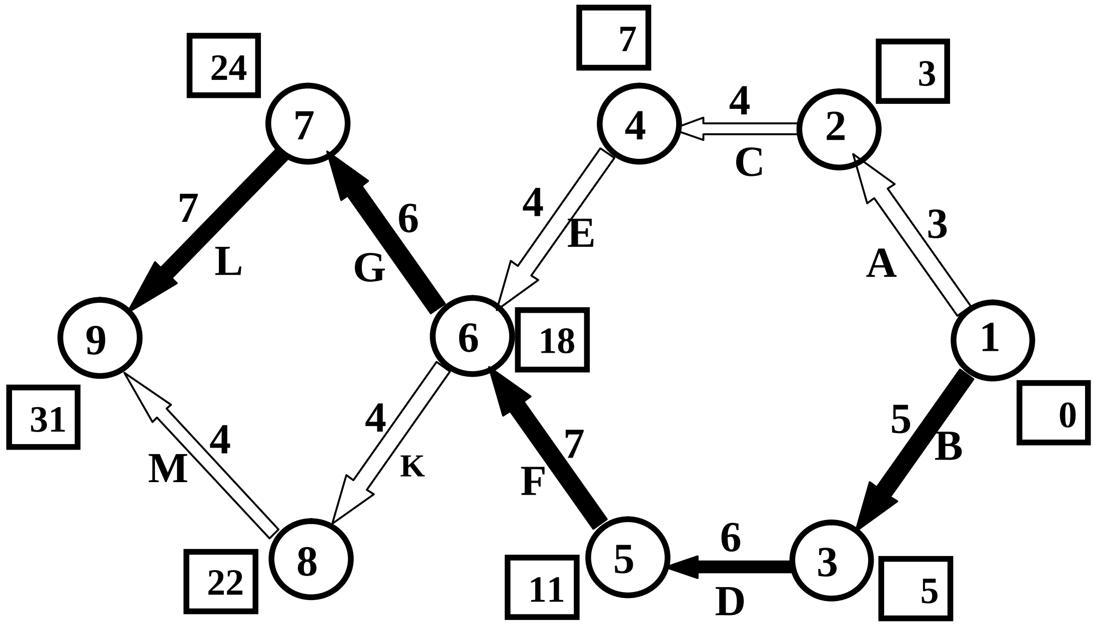
1 – **تحديد المخطط الشبكي و تحديد المسار الحرج**

2 – **إيجاد الوقت المحدد لكل نشاط**

4 - **إيجاد احتمال انتهاء المشروع خلال** 31 **أسبوع علي الأكثر**

5 - **إيجاد احتمال لا يتأخر عن** 34 **أسبوع**

نقوم برسم المخطط كالتالي



و نلاحظ انة تم حساب زمن كل نشاط المحدد [المتوقع] من العلاقة

الزمن المتوقع للنشاط $= \dfrac{P + 4N + O}{6}$

فمثلا الزمن المتوقع للنشاط A (1 ـ 2) يساوي

الزمن المتوقع لـ $\mathbf{A} = \dfrac{4 + 3 \times 4 + 2}{6} = 3$

الزمن المتوقع لـ $\mathbf{B} = \dfrac{6 + 5 \times 4 + 4}{6} = 5$

الزمن المتوقع لـ $\mathbf{C} = \dfrac{5 + 6 \times 4 + 3}{6} = 4$

و هكذا لباقي الأنشطة

يحسب كل مربع بجمع المربع السابق علي الزمن و الدائرة الداخل لها اكثر من سهم ناخذ المجموع الاكبر

و نقوم بعد ذلك بوضع الأزمنة المتوقعة علي الأنشطة و حساب البداية المبكرة لكل نشاط كما هو موضح بالشكل السابق

لحساب المسار الحرج نوجد مجموع أزمنة كل مسار متاح من البداية للنهاية

المسار	الوقت
1-2-4-6-7-9	24= 7+6+4+4+3
1-2-4-6-8-9	19= 4+4+4+4+3
1-3-5-6-7-9	31 = 7+6+7+6+5
1-3-5-6-8-9	26 = 4+4+7+6+5

المسار الحرج هو **1 – 3 – 5 – 6 – 7 - 9**

وقت إنجاز المشروع = **31** أسبوع

نقوم بحساب التباين للأنشطة الحرجة كالتالي

التباين للنشاط **B** = $\left(\frac{O-P}{6}\right)^2 = \left(\frac{4-6}{6}\right)^2 = \frac{1}{9}$

التباين للنشاط **D** = $\left(\frac{5-7}{6}\right)^2 = \frac{1}{9}$

التباين للنشاط **F** = $\left(\frac{5-9}{6}\right)^2 = \frac{4}{9}$

التباين للنشاط **G** = $\left(\frac{5-7}{6}\right)^2 = \frac{1}{9}$

التباين للنشاط **L** = $\left(\frac{6-10}{6}\right)^2 = 1$

و يكون التباين الكلي $\sigma^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + 1$

$= 1,7777$

$\therefore$ الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{1.777777} = 1,333$

لحساب احتمال إنهاء المشروع في 31 أسبوع نحسب القيمة z كالتالي

$$z = \frac{x - E(t)}{\sigma} = \frac{31 - 31}{1.333} = 0$$

نلاحظ أن قيمة z **المقابلة للصفر في الجدول الطبيعي هي** 0,5

∴ **احتمال أن ينفذ المشروع في** 31 **أسبوع** = 50 ٪

 # لحساب احتمال إنهاء المشروع في 34 أسبوع نحسب القيمة z كالتالي

$$z = \frac{x - E(t)}{\sigma} = \frac{31 - 34}{1.333} = 2.25$$

نلاحظ أن قيمة z **المقابلة لـ** 2,25 **في الجدول الطبيعي هي** 0,9878

∴ **احتمال أن ينفذ المشروع في** 34 **أسبوع** = 98,87 ٪

الفصل الخامس
النقل و التوزيع

إذا كان لدينا مجموعة من المصانع تنتج سلعة واحدة متماثلة و لدينا عدد من الاسواق تباع فيها هذة السلعة و كان المراد عمل خطة لنقل الوحدات المنتجة من المصانع إلي الاسواق بحيث تكون تكلفة النقل اقل ما يمكن ومن هنا نشئت نماذج النقل

طبيعة نموذج النقل

1 **ـ وجود بيانات تعبر عن الجهات التي تعرض المنتج والجهات الطالبة للمنتج** (**المصانع ، الاسواق**) **وبالتالي يكون هناك كميات معروضة وكميات مطلوبة** (**الطاقات**)

2ـ **أن يكون لدينا بيان بتكلفة نقل الوحدة من أي مصنع إلي أي سوق**

حيث أن S1 ، S2 ، S3 ، .. **تمثل المصانع**

D1 ، D2 ، D3 ، ... **تمثل الأسواق**

3) **وجود تكلفة نقل الوحدة من كل مصنع إلى كل سوق**

وهذه المشكلة تحل بأسلوب السمبلكس الخاص بتدنيه تكلفة النقل وهذا الأسلوب يحتاج مجهود كبير ولكن نظراً لوجود خاصية ملازمة لمشكلة النقل هي أن جميع معاملات المتغيرات في المعادلات هي الواحد الصحيح فإن هذا أسفر تطوير طريقه حل خاصه لمشاكل النقل و هذه الطريقة تتمثل في الخطوات التالية

1 **ـ تفريغ بيانات المثال في شكل جدول وبعد تكوين الجدول يمكن الوصول إلى الحل الأمثل بإتباع الخطوات التالية**

2 **ـ القيام بتوزيع مبدئي ويتم ذلك بطريقة من طرق عدة سنشرحها**

3 **ـ اختبار مثالية الحل وهل هناك إمكانية للتحسين فإذا كان الحل امثل نتوقف وإذا كان الحل ممكن تحسينه نعود مرة أخرى للجدول لتحسين الحل ثم نختبر مرة أخرى و يستخدم في اختبار إمثالية الحل طريقة حجر الوطء**

كمدخل لموضوع النقل نعطي المثال التالي :

لو تصورنا على سبيل المثال وجود ثلاث مصانع تقع في ثلاث محافظات هي القاهرة ، دمياط ، المنيا، توزع إنتاجها على ثلاث مراكز توزيع(اسوق) في ثلاث محافظات مختلفة هي ، الوادي الجديد ، المنصورة ، بني سويف

فإذا كانت طاقات الإنتاج لكل مصنع علي التوالي هي (500، 400، 1000) و طاقة الاسواق الثلاثة علي التوالي هى (600 ، 400 ، 900) حيث أن

S1 تمثل الكمية المعروضة من مصنع القاهرة

S2 تمثل الكمية المعروضة من مصنع دمياط

S3 تمثل الكمية المعروضة من مصنع المنيا

D1 سوق الوادي الجديد ، **D2** سوق المنصورة ، **D3** سوق بنى سويف

وبفرض أن تكلفة نقل الوحدة من المصنع إلى مركز التوزيع كانت كالتالي

من **S1** إلى**D1 = 5** ، من **S1** إلى **D2 = 7** ، من **S1** إلى **D3 = 12**

من **S2** إلى **D1 = 13** ، من **S2** إلى **D2 = 3** ، من **S2** إلى **D3 = 9**

من **S3** إلى **D1 = 10** ، من **S3** إلى **D2 = 6** ، من **S3** إلى **D3 = 17**

ونلاحظ أن مجموع الكميات المطلوبة لابد أن يساوي مجموع الكميات المعروضة ليحدث التوازن وإذا لم يحدث ذلك فتكون المشكلة غير متوازنة وهذا غير مقرر و يمكن تفريغ المشكلة في الجدول التالي

الي من	D1	D2	D3	ط المصنع
S1	5	7	12	500
S2	13	3	9	400
S3	10	6	17	1000
الاحتياجات	600	400	900	1900

طـــرق الـتــوزيع

أ - طريقة الركن الأيمن العلوي [الشمال الشرقي]

في هذه الطريقة نبدأ بشحن الوحدات من أول خلية في أول صف ونضع في الخلية الطاقة الأقل سواء للمصنع أو السوق ثم ننتقل إلى الخلية التي أسفلها ثم التي بجاورها ثم التي أسفلها وهكذا و نلاحظ أن الخلايا المشحونة تأخذ شكل سلم من اليمين إلى اليسار .

مثـــــال

من الجدول للمثال السابق المطلوب إيجاد تكلفة النقل في حالة استخدام طريقة الركن الأيمن العلوي

الحـــــــل

نقوم أولاً بالبدء في ملء الخانة الأولى في الصف الأول حيث يكون إنتاج المصنع **500** و السوق يحتاج **600** فنضع في هذه الخانة الرقم الأصغر وهو **500**

الي / من	D1	D2	D3	ط المصنع
S1	5 / 500	7	12	500
S2	13 / 100	3 / 300	9	400
S3	10	6 / 100	17 / 900	1000
الاحتياجات	600	400	900	1900

ثم نتحرك للخانة التي أسفلها نجد أن المتبقي للمصنع هو

(**600-500 = 100**) في حين أن طاقة المصنع الثاني هي **400**

فنضع القيمة الأقل وهي **100** وبالتالي فأن السوق الأول اخذ كفايته فنتحرك إلى اليسار فنجد أن المصنع الثاني تبقى له (**400 –100 =300**) في حين أن السوق الثاني يحتاج **400** و بالتالي نأخذ القيمة الأقل **300** ثم نتحرك للخانة التي اسفلها نجد أن المتبقي للسوق هو (

400-300 = 100) في حين أن طاقة المصنع الثالث هي 1000فأخذ القيمة الأقل 100 وبالتالي فأن السوق الثاني اخذ كفايته فنتحرك إلى اليسار فنجد أن المصنع الثالث تبقي له (1000 –100 =900) في حين أن السوق الثالث احتياجاته 900 وبالتالي نضع القيمة 900

و تصبح قيمة تكاليف النقل هي

ت = (5 × 500) + (13 ×100) +(3 × 300)

+ (6 ×100) +(17 × 900) = 20600

2– طرقة الترتيب التصاعدي لتكاليف النقل

في هذه الطريقة نبحث عن اقل تكلفة بالجدول ثم نبدأ بالملء فيها ثم نبحث عن التكلفة التي تليها في الترتيب مع اشتراط أن تكون الخلية قابلة للملء (أي أن صفها أو عمودها لا زل به طاقة متاحة) و نستمر هكذا حتى نوزع طاقات المصانع علي الأسواق بالكامل

مثـــــال

إذا كان لديك مشكلة النقل التالية

الي من	D1	D2	D3	D4	ط المصنع
S1	10	20	30	15	7000
S2	12	19	25	32	9000
S3	8	35	17	26	18000
الاحتياجات	8000	5000	7000	14000	34000

و المطلوب إيجاد تكلفة النقل في حالة استخدام طريقة الترتيب التصاعدي لتكلفة النقل

الحـــــــل

الي / من	D1	D2	D3	D4	ط المصنع
S1	10	20	30	15 / 7000	7000
S2	12	19 / 5000	25	32 / 4000	9000
S3	8 / 8000	35	17 / 7000	26 / 3000	18000
الاحتياجات	8000	5000	7000	14000	34000

نبدأ من الخلية صاحبة اقل تكلفة وهى **(8)** نضع بها الرقم الأقل و هو **8000** و بالتالي يكون السوق الأول اخذ احتياجاته بالكامل و المصنع الثالث باقي له **10000** ثم نتحرك للتكلفة التي تليها و هي **(10)** فنجد أنها في عمود السوق الأول و بالتالي لا نستطيع وضع أي شئ بها بالمثل للتكلفة التالية و هي **(12)** ثم نبحث عن التكلفة التي تليها و هي **15** نضع بها الرقم الأقل و هو **7000** و نستمر هكذا حتى نوزع كل طاقات المصانع علي الأسواق

و تصبح قيمة تكاليف النقل هي

ت = (15 × 7000) + (19 ×5000) +(32 × 4000)

+ (8 ×8000) +(17×7000) = 589000

3 – طريقة الفروق (طريقة فوجل التقريبية)

تعطي هذه الطريقة حل نهائي من أول مرة يكون أمثل في الغالبية العظمي من الحالات حوالي 95 % يكون الحل امثل

خطوات الحل بهذه الطريقة

1 – نحسب الفرق بين اقل تكلفتين في كل عمود ونضعها في صف إضافي اسفل صف المجموع ونسميه الفرق الأول و نحسب أيضا الفرق بين اقل تكلفتين لكل صف ونضعها في عمود إضافي بجوار عمود المجموع ونسميه الفرق الأول أيضا

وبالتطبيق علي المثال التالي نجد أن الجدول يصبح كالتالي

الي / من	D1	D2	D3	المجموع	الفرق الاول
S1	14	12	9	4000	3
S2	10	16	12	6000	2
S3	8	9 5000	17	5000	1
المجموع	2800	~~5300~~ 300	6900	15000	
الفرق الأول	2	3	3		

2 – نحدد أي صف أو عمود صاحب اكبر فرق ثم نقوم ببدء الشحن من الخلية صاحبة اقل تكلفة في هذا الصف أو العمود و في الجدول السابق اكبر فرق يكون لـ 3 ولكن هذا الفرق لأكثر من صف و عمود وبالتالي نشحن في الصف أو العمود الذي يحتوي علي اقل تكلفة و إذا تساوت بعض الصفوف و الأعمدة في اقل تكلفة نشحن في الخلية التي تستوعب اكبر كمية وبهذا المفهوم سوف نشحن في الخلية S3D2 لأنها تستوعب اكبر كمية فنجد أن السوق D2 يحتاج إلى 5300 وحدة و المصنع S3 ينتج 5000 وحدة و بالتالي نضع في الخلية 5000 و بالتالي فأن المصنع S3لن يغذّي باقي المراكز أي أن الصف S3 لن توضع به قيم أخرى وبالتالي تهمل تكلفة هذا الصف بعد ذلك و يتبقى للسوق D2 (5300-5000 = 300)

3 – نحسب الفروق مرة أخري للصفوف و الأعمدة مع إهمال التكاليف بالصف S3 لأنة اخذ كفايته وتسمي الفروق الجديدة الفرق الثاني و الجدول التالي يوضح ذلك

الي / من	D1	D2	D3	المجموع	الفرق الثاني
S1	14	12	9	**4000**	**3**
S2	10 **2800**	16	12	~~6000~~ **3200**	**2**
S3	~~8~~ –	~~9~~ **5000**	~~17~~ –	~~5000~~	–
المجموع	~~2800~~	~~5300~~ 300	**6900**	**15000**	
الفرق الثاني	**4**	**4**	**3**		

نلاحظ أن اكبر فرق هو 4 ولكن هذا الفرق لأكثر من عمود وبالتالي نشحن في العمود الذي يحتوي علي اقل تكلفة وبهذا المفهوم سوف نشحن في الخلية

في الخلية S2D1 حيث أن D1 يحتاج 2800 و S2 ينتج 6000 فنضع 2800 ويصبح D1 أخذ كفاية وبالتالي تهمل تكاليفه و يتبقى للمصنع S2

(3200 = 2800 – 6000)

4 – نحسب الفروق مرة أخري للصفوف و الأعمدة مع إهمال التكاليف بالصف S3 و العمود D1 لأنهم اخذوا كفايتهم وتسمي الفروق الجديدة الفرق الثالث و الجدول التالي يوضح ذلك

الفرق الثالث	المجموع	D3	D2	D1	الي من
3	4000	9	12	~~14~~ –	S1
4	~~6000~~ ~~3200~~	~~12~~ 3200	~~16~~	~~10~~ 2800	S2
–	~~5000~~	~~17~~ –	~~9~~ 5000	~~8~~ –	S3
	15000	~~6900~~ 3700	~~5300~~ 300	~~2800~~	المجموع
		4	4	–	الفرق الثالث

نلاحظ أن اكبر فرق هو 4 ولكن هذا الفرق لصف و عمود وبالتالي نشحن في الصف أو العمود الذي يحتوي علي اقل تكلفة و إذا تساوت في اقل تكلفة نشحن في الخلية التي تستوعب اكبر كمية وبهذا المفهوم سوف نشحن في الخلية S2D3فنلاحظ أن D3 يحتاج 6900 و المصنع S2 متاح له 3200 و بالتالي نضع في الخلية 3200 ويصبح S2 أخذ كفاية وبالتالي تهمل تكاليفه

5 – نلاحظ انه لم يتبقى سوي صف واحد له تكاليف وهنا نتوقف عن عمل الفروق ونشحن الباقي حسب الخلية التي تناسبه فيصبح الجدول النهائي كالتالي

ويصبح الشكل النهائي للتوزيع هو الموضح بالجدول التالي

المجموع	D3	D2	D1	الي من
4000	9 3700	12 300	14	S1
~~6000~~	12 3200	16	10 2800	S2
5000	17	9 5000	8	S3
15000	6900	5300	~~2800~~	المجموع

و تصبح قيمة دالة الهدف (التكلفة) هي

تكلفة التوزيع = (12 × 300) + (9 ×3700) +(12 × 3200)

+ (10 ×2800) +(9 × 5000) = 148300

الفصل السادس

اتخاذ القرار في حالة عدم التأكد

أولاً : مفاهيم أساسية :

القرار : هو اختيار لبديل واحد من بين بديلين أو مجموعة من البدائل .
أما عملية اتخاذ القرار : هي اختيار موضوعي بين بدائل مختلفة للعمل تقود إلى تحقيق النتائج المطلوبة . وفي تعريف آخر لهذه العملية :
هي اختيار البديل الأمثل من بين مجموعة من البدائل تحقيقاً لأعلى عائد أو أدنى تكلفة أو تحقيقاً لأعظم منفعة .

ثانياً : خطوات عملية اتخاذ القرار :

إنَّ عملية اتخاذ القرار تتم لمعالجة مشكلة محددة أو لمواجهة مواقف أو حالات معينة محتملة الوقوع أو لتحقيق أهداف مرسومة .
وتمر عملية اتخاذ القرار غالباً بالمراحل التالية :

1- تحديد المشكلة :

والمشكلة هي عبارة عن الخلل الذي يتواجد نتيجة اختلاف الحالة القائمة عن الحالة المرغوب بها وتحديد المشكلة تحديداً دقيقاً أمراً غاية في الأهمية وهنا نتذكر المقولة التالية : "المشكلة المحددة تحديداً سليماً مشكلة نصف محلولة " .

2- تحديد الهدف :

وهو الهدف أو مجموعة الأهداف أو الغايات التي يسعى متخذ القرار للوصول إليها ولابد من التحديد الدقيق للأهداف المطلوبة وذلك للمفاضلة بين الحلول البديلة لمشكلة قراريَّة معينة .

3- البحث عن البدائل :

يقصد بهذه المرحلة التحري والتفتيش عن الحلول المختلفة لحل المشكلة التي تم تشخيصها بدقة في المرحلة الأولى .
وفي هذه المرحلة يتم وضع أكبر عدد ممكن من البدائل المحتملة لحل المشكلة المطروحة .

4- تقييم البدائل واختيار أفضلها :

وتتمثل صعوبة هذه المرحلة في أنَّ مزايا وعيوب كل بديل لا تظهر وقت بحثها إنَّما تظهر فعلاً في المستقبل , ويتم في هذه المرحلة اختيار البديل

الأمثل الذي يحقق مجموعة من الشروط (إمكانية التنفيذ , التكاليف المالية , الاستغلال الأمثل لعناصر الإنتاج ....وغيرها) .

5- تنفيذ القرار ورقابته :

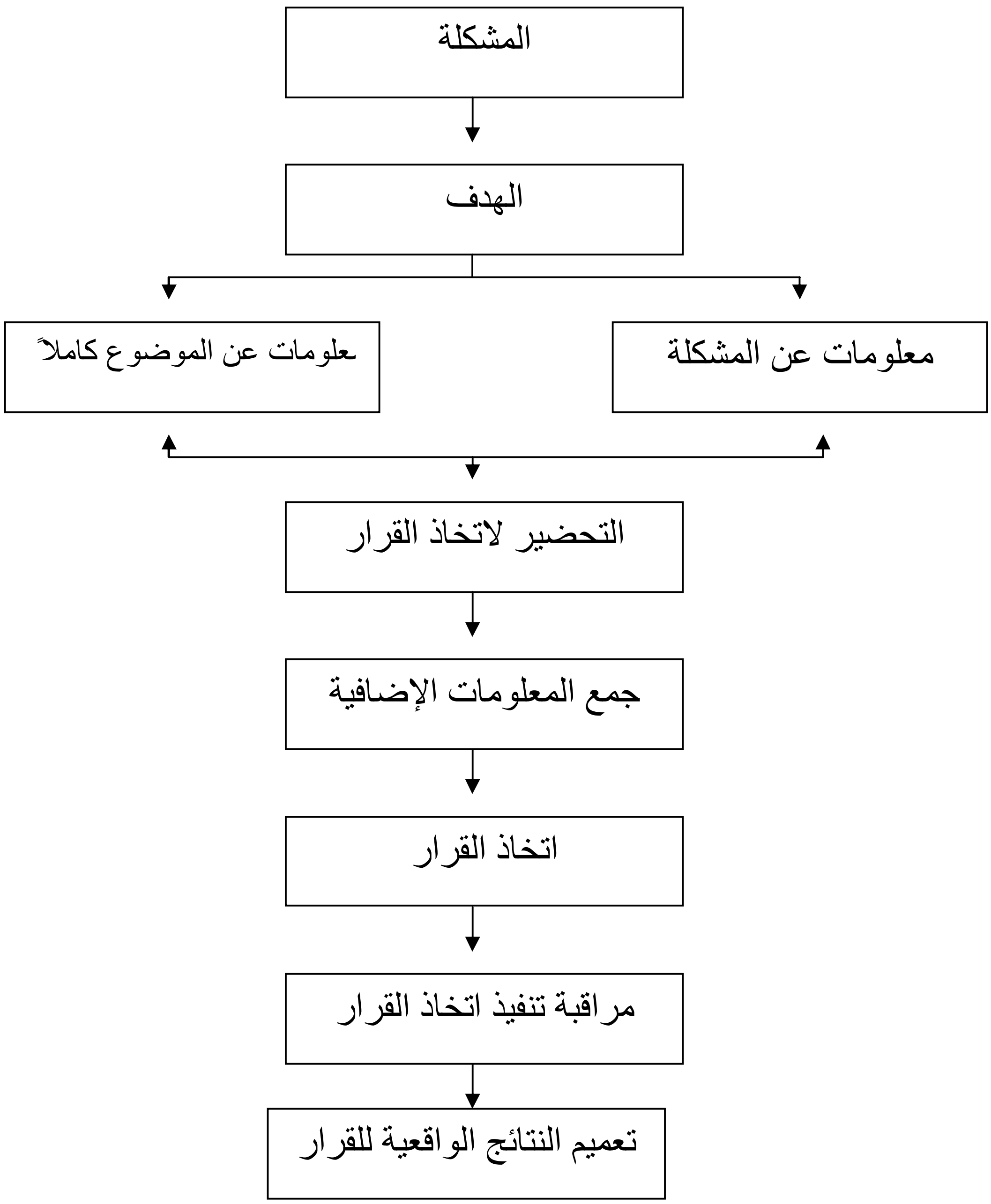
حيث لابد من تنفيذ القرار الذي اتخذ في المرحلة السابقة ومتابعة ورقابة عملية التنفيذ للتأكد من سلامة التنفيذ وصحة القرار .

6- متابعة التطبيق :

حيث لابد من المتابعة المستمرة لعملية التنفيذ وذلك بسبب التغير المستمر للعوامل والظروف المحيطة بعملية اتخاذ القرار .

ويمكن التعبير عن الخطوات السابقة من خلال الشكل التالي :

شكل رقم (1) خطوات عملية اتخاذ القرار



ثالثاً : العوامل المؤثرة في عملية اتخاذ القرار :
تتأثر عملية اتخاذ القرار بمجموعة من العوامل التي قد تعيقها عن الصدور بصورة صحيحة ومن بين هذه العوامل ما يلي :
1- تأثير البيئة الخارجية :
حيث أنَّ المنظمة خلية من خلايا المجتمع تتأثر به بشكل مباشر أو غير مباشر ومن الظروف الخارجية المؤثرة الظروف الاقتصادية والاجتماعية والسياسية والقيم والعادات .... وغيرها من العوامل .
2- تأثير البيئة الداخلية :
حيث يتأثر القرار بالعوامل الداخلية من حيث حجم المنظمة ومدى نموها وعدد العاملين فيها والمتعاملين معها ....إلخ
3- تأثير متخذ القرار :
حيث تؤثر شخصية متخذ القرار على نوعية القرار المتخذ وعادة ما نجد أربع أنواع من السلوك عند متخذ القرار هي المجازفة والحذر والتسرع والتهور .
4- تأثير مواقف اتخاذ القرار :
تختلف مواقف اتخاذ القرار من حيث درجة تأكد الإدارة أو متخذ القرار من النتائج المتوقعة للقرار .
رابعاً : الصعوبات التي تعترض عملية اتخاذ القرار :
1- عدم إدراك المشكلة وتحديدها بدقة .
2- عدم القدرة على تحديدالأهداف التي يمكن أنَّ تتحقق باتخاذ القرار .
3- البيئة التي تعمل فيها المؤسسة .
4- نقص المعلومات والخوف من اتخاذ القرارات .

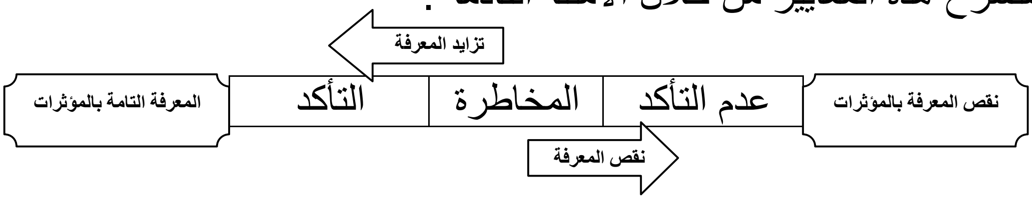
خامساً : أنواع القرارات :

1- القرارات في حالة التأكد التام :
وهنا يكون متخذ القرار متيقن من القرارات التي يتخذها إذ تتوفر لديه المعرفة الكاملة بالظروف التي يتم فيها اتخاذ القرار.
2- القرارات في حالة المخاطرة :
وهنا يستطيع متخذ القرار أن يحدد احتمالات تحقق كل حالة من حالات الطبيعة ويستخدم هنا أسلوب الأمل الرياضي في تحديد القرار الأمثل .
3- القرارات في حالة عدم التأكد :

وهنا لا يكون لمتخذ القرار أي معلومات أو احتمالات عن حالات الطبيعة وفيما يلي أهم المعايير المستخدمة في هذه الحالة :

- معيار لابلاس (الاحتمالات المتساوية)
- المعيار المتفائل أقصى- أقصى
- المعيار المتشائم أقصى- أدنى
- معيار هرويز (الواقعية)
- معيار سافاج (الندم)

وسنشرح هذه المعايير من خلال الأمثلة القادمة .



الشكل رقم (2) : ظروف القرار

سادساً : المكونات الأساسية لمصفوفة القرار :

1- حالات الطبيعة Q j :

وهي جميع العوامل الخارجية المؤثرة على المشكلة التي بين يدينا والتي يصعب السيطرة عليها مثل ارتفاع أو انخفاض أسعار الصرف .

2- مجموعة البدائل الممكنة A i :

وتمثل جميع الحلول الممكنة للمسألة القرارية والتي يمكن السيطرة عليها مثل طرح بضاعة أو عدم طرح بضاعة .

وتكون المصفوفة على الشكل التالي:

Q j / **A i**	Q1	Q2	Q3
a 1	X 11	X 12	X 13
a 2	X 21	X 22	X 23
a 3	X 31	X 32	X 33

القيمة X 23 هي القيمة المترتبة جراء استخدام البديل الثاني وتحقق حالة الطبيعة الثالثة وهكذا .

أمثلة عملية حول اتخاذ القرار في حالة عدم التأكد :

- مثال عملي (1) :

أفترض أنَّ لدى متخذ القرار مصفوفة العائد التالية :

Q j / A i	Q1	Q2	Q3
a_1	10	-5	8
a_2	12	8	3
a_3	20	-1	12

والمطلوب : ما هو القرار الأمثل وفق المعايير الخمسة السابقة .

1- معيار لابلاس :وهنا يعتبر متخذ القرار أن المستقبل مجهول أمامه ولا توجد أسباب لتمييز حالة عن أخرى لذلك يعطي احتمالات متساوية لكل حالة من حالات الطبيعة .

$$MAX\ i = (x_{11} + x_{12} + x_{1n})/ n$$

حيث n : عدد حالات الطبيعة .

أولا : نحدد متوسط العوائد المتوقعة لكل بديل

$$L(a1) = (10 – 5 + 8) /3 = 4.1/3$$
$$L(a2) = (12 +8 + 3) /3 = 7.2/3$$
$$L(a3) = (20 -1 +12)/3 = 10.1/3$$

ثانيا : نختار أقصى قيمة متوقعة .

$$Max\ i (4.1/3, 7.1/3 , 10.1/3) = 10.1/3$$

إذاً البديل الثالث هو الأمثل وفق هذا المعيار .

2- المعيار المتشائم : (Max i Min j) وهنا يفترض متخذ القرار أن كل الظروف المحيطة بالقرار سيئة ويختار أفضل هذه الظروف .

أولا : نختار أدنى عائد لكل بديل .

البدائل	Min j
a 1	-5
a 2	3
a 3	-1

ثانيا : نختار أقصى هذه القيم .

$$Max(-5, 3, -1) = 3$$

إذاً البديل الثاني هو الأمثل وفق المعيار المتشائم .

3- المعيار المتفائل :(Max i max j) وهنا يفترض متخذ القرار أن كل الظروف المحيطة بالقرار جيدة ويختار أفضلها .

أولا : نختار أعلى عائد لكل بديل .

البدائل	Max j
a 1	10
a 2	12
a 3	20

ثانيا : نختار أقصى هذه القيم .

$$Max(10, 12, 20) = 20$$

إذا البديل الثالث هو الأمثل وفق المعيار المتفائل .

4- معيار الواقعية (هرويز) : وهو معيار توافقي بين المتفائل والمتشائم حيث يضع متخذ القرار معامل الواقعية α حيث α بين الصفر والواحد فإذا كانت قريبة من الواحد كانت النظرة متفائلة وإذا كانت قريبة من الصفر كانت متشائمة . $Max\ i = \{ max\ j(\alpha) + min\ j\ (1-\alpha)\}$

البدائل	Max j	Min j
a 1	10	-5
a 2	12	3
a 3	20	-1

$$L(a\ 1) = 0.5(10) + 0.5(-5) = 2.5$$

$$L(a\ 2) = 0.5(12) + 0.5(3) = 7.5$$

$$L(a\ 3) = 0.5(20) + 0.5(-1) = 9.5$$

$$Max\ i(2.5, 7.5, 9.5) = 9.5$$

إذاً البديل الثالث هو الأمثل وفق معيار الواقعية (هرويز) .

5- معيار الأسف (سافاج) : (Min i , Max j) .

تكون نظرة متخذ القرار تشاؤمية وفق هذا المعيار بالنسبة للمتغيرات المؤثرة بالقرار فهو يحاول جعل الندم الأعظمي في حدوده الدنيا وعادة ندعوه الحد الأدنى لتكلفة الفرصة البديلة وهي التكلفة التي تتم خسارتها عند اختيار البديل غير الأمثل ولذا يتم تشكيل مصفوفة خسارة الفرصة الضائعة وذلك بأخذ أكبر قيمة في كل عمود وطرح بقية قيم العمود منها.

Q j / A i	Q1	Q2	Q3
a 1	10	13	4
a 2	8	0	9
a 3	0	9	0

البدائل	Max j
a 1	13
a 2	9
a 3	9

Min (13 , 9 , 9) = 9

إذاً نلاحظ أن هناك بديلان ممكنان نختار أي منهما ونسمي هذه الحالة بحالة تعدد الحلول .

- مثال عملى (2) :

لتكن لدينا مصفوفة التكاليف التالية(الأرقام في المثال افتراضية للتوضيح)

Q j / A i	Q1	Q2	Q3
a 1	5	6	3
a 2	2	4	4

والمطلوب : حدد القرار الأمثل وفق المعايير الخمسة .

1- معيار لابلاس :

$$L(a1) = (5 + 6 + 5) /3 = 4.67$$

$$L(a2) = (2 + 4 + 4) /3 = 3.33$$

$$Max\ i (4.67 , 3.33) = 3.33$$

وبما أن المصفوفة تكاليف نختار التكلفة الأدنى وتقابل البديل الثاني

2- المعيار المتشائم : (Max i Min j) أفضل الأسوأ .

أولاً : نختار أسوأ التكاليف

البدائل	Min j
a 1	6

a 2 4

ثم نختار أعظم أسوأ التكاليف

Max i (6 , 4) = 4

3- المعيار المتفائل : (Max i max j) أفضل الأفضل .

أولاً : نختار أفضل التكاليف

البدائل	Max j
a 1	3
a 2	2

ثم نختار أفضل أفضل التكاليف .

Max i (3 , 2) = 2

4- معيار هرويز : $Max\ i = \{ max\ j(\alpha) + min\ j\ (1-\alpha)\}$

ولنفترض أن $\alpha = 0.6$

البدائل	Max j	Min j
a 1	3	6
a 2	2	4

L (a 1) = 3 (0.6) + 6 (0.4) = 4.2

L(a 2) = 2 (0.6) + 4 (0.4) = 2.8

Max i (4.2 , 2.8) = 2.8

5- معيار الأسف (سافاج) : نشكل مصفوفة الندم : في حالة التكاليف نأخذ أقل قيمة في كل عمود ونطرحها من نفسها وباقي القيم .

Q j / A i	Q1	Q2	Q3
a 1	3	2	0
a 2	0	0	1

ثم نأخذ أسوأ أعظم القيم (Min i Max j)

البدائل	Max j
a 1	0
a 2	0

Min (0 , 0) = 0 إذاً لا فرق بين البديلين .

- حالة تطبيقية 1 :

ترغب شركة صناعية في شراء آلة لإنتاج سلعة محددة ولديها ثلاث بدائل وهي :شراء آلة كبيرة طاقتها /2000/وحدة أسبوعياً والتكاليف الثابتة

السنوية /100/ ألف جنية أما التكاليف المتغيرة /13/ جنية للوحدة الواحدة , شراء آلة متوسطة طاقتها /1280/وحدة أسبوعياً و ت.ث /80/ ألف جنية و ت.م /14.75/ جنية , شراء آلة صغيرة طاقتها /500/ وحدة أسبوعياً و ت.ث /40/ ألف جنية و ت.م /15.4/ فإذا كانت مستويات الطلب المتوقعة أسبوعياً هي 500 , 1500, 1800 وحدة وكان سعر البيع للوحدة في السوق /20/ جنية والوحدة التي لا تباع تقدر /13/ جنية قبل استبعاد تكلفتها والمطلوب :

1- تحديد مجموعة الأفعال الممكنة ومجموعة حالات الطبيعة .
2- بناء جدول النتائج الشرطية (مصفوفة العوائد) .
3- تحديد القرار الأمثل وفق المعيار المتفائل و معيار هرويز .

علماً أنَّ السنة /50/أسبوعاً .

الحل ....

معطيات المسألة :

سعر البيع /20/ والوحدة التي لا تباع تقدر /13/ جنية .

ت.م للوحدة	ت.ث السنوية	الطاقة الإنتاجية	
13	100000	2000	آلة كبيرة
14.75	80000	1280	آلة متوسطة
15.4	40000	500	آلة صغيرة

أولاً : تحديد البدائل الممكنة وحالات الطبيعة :

البدائل الممكنة : a 1 : شراء آلة كبيرة
a 2 : شراء آلة متوسطة
a 3 : شراء آلة صغيرة

حالات الطبيعة : Q 1 : أمكانية بيع / 1800 / وحدة
Q 2 : أمكانية بيع / 1500 / وحدة
Q 3 : أمكانية بيع / 500 / وحدة

ثانياً :بناء مصفوفة النتائج (العوائد) :

Q j / A i	1800 Q1	1500 Q2	500 Q3
2000 a 1	10600	8500	1500
1280 a 2	5120	5120	-340
500 a 3	1500	1500	1500

كيف تم ملئ المصفوفة :

الآلة الكبيرة a 1 :

ت.ث أسبوعية 100000/50 = 2000

ت.ث للوحدة 2000/2000 = 1

ت.ك = ت.ث + ت.م = 13 + 1 = 14

الخسارة في حالة عدم البيع 13 – 14 = -1

الربح = السعر – ت.ك = 20 – 14 = 6

X 11 : 1800 (6) + 200 (-1) = 10600

X 12 : 1500 (6) + 500 (-1) = 8500

X 13 : 500(6) + 1500 (-1) = 1500

الآلة المتوسطة a 2 :

ت.ث أسبوعية 80000/50 = 1600

ت.ث للوحدة 1600/1280 = 1.25

ت.ك = ت.ث + ت.م = 14.75 + 1.25 = 16

الخسارة في حالة عدم البيع 13 – 16 = -3

الربح = السعر – ت.ك = 20 – 16 = 4

X 21 : 1280 (4) = 5120

X 22 : 1280 (4) = 5120

X 23 : 500 (4) + 780 (-3) = -340

الآلة الصغيرة a 3 :

ت.ث أسبوعية 40000/50 = 800

ت.ث للوحدة 800/500 = 1.6

ت.ك = ت.ث + ت.م = 15.4 + 1.6 = 17

الخسارة في حالة عدم البيع 4- = 17 – 13

الربح = السعر – ت.ك = 3 = 17 – 20

$X_{31} : 500 (3) = 1500 = X_{32} = X_{33}$

ثالثاً : القرار الأمثل وفق المعيار المتفائل ومعيار هرويز :

1 – المعيار المتفائل :

أولا : نختار أعلى عائد لكل بديل .

Max j	البدائل
10600	a 1
5120	a 2
1500	a 3

ثانيا : نختار أقصى هذه القيم .

$$Max (10600 , 5120 , 1500) = 10600$$

إذاً البديل الأول هو الأمثل وفق هذا المعيار .

2 – معيار هرويز :إذا افترضنا أنّ $\alpha = 0.5$

Min j	Max j	البدائل
1500	10600	a 1
-340	5120	a 2
1500	1500	a 3

$$L (a 1) = 0.5 (10600) + 0.5 (1500) = 6050$$
$$L(a 2) = 0.5 (5120) + 0.5 (-340) = 2390$$
$$L(a 3) = 0.5 (1500) + 0.5(1500) = 1500$$
$$Max (6050 , 2390 , 1500) = 6050$$

إذاً البديل الأول هو الأمثل وفق هذا المعيار .

ملاحظة **:** القرار الأمثل بالنسبة لبقية المعايير كما في الأمثلة السابقة ولا داعي للتكرار

- حالة تطبيقية 2 :

شركة سورية لإنتاج الصابون ترغب في إنشاء مصنع لها فإذا توفر لها ثلاث بدائل لإقامة هذا المصنع في ثلاث مدن :

1- إنشاء مصنع صغير في القليوبية بطاقة إنتاجية مقدارها /100/ ألف وحدة سنوياً والتكلفة الثابتة تقدر /50/ ألف جنية والتكلفة المتغيرة تقدر /1.5/ جنية للوحدة الواحدة .
2- إنشاء مصنع متوسط في بني سويف بطاقة إنتاجية /200/ ألف وحدة سنوياً والتكلفة الثابتة تقدر /80/ ألف جنية والتكلفة المتغيرة تقدر /2.1/ جنية للوحدة الواحدة .
3- إنشاء مصنع كبير في الاسكندرية بطاقة إنتاجية /300/ ألف وحدة سنوياً والتكلفة الثابتة تقدر /120/ ألف جنية والتكلفة المتغيرة تقدر /2.6/ جنية للوحدة الواحدة .

فإذا علمت أنًّ :
1- كل مصنع من المصانع يقوم بتكييف إنتاجه وفقاً للطلب أي أنَّه لا يقوم بإنتاج وحدات تفوق الطلب المتوقع .
2- الطلب الذي لا يلبى من قبل الشركة تعتبره خسارة (فرصة ضائعة) مقدارها /1/ جنية عن كل وحدة غير ملبية .
3- الطلب المتوقع هو /50/, /75/, /125/, /150/, /250/ ألف وحدة على التوالي .

و المطلوب :

أ – تحديد مجموعة البدائل الممكنة ومجموعة حالات الطبيعة .
ب – بناء جدول النتائج (أرباح) .
ج – تحديد البديل الأمثل باستخدام المعايير الخمسة .

الحل

المعطيات هي كالتالي :

ت.م للوحدة	ت.ث السنوية	الطاقة الإنتاجية	
1.5	50000	100000	القليوبية
2.1	80000	200000	بني سويف
2.6	120000	300000	الاسكندرية

- سعر البيع للوحدة الواحدة /10/ جنية
- الطلب الذي لا يلبى تعتبره الشركة خسارة (فرصة ضائعة) مقدارها /1/ جنية للوحدة الواحدة .
- الإنتاج يتكيف مع الطلب .

أولاً : تحديد مجموعة البدائل الممكنة ومجموعة حالات الطبيعة :

البدائل الممكنة : A i

a 1 : إنشاء مصنع صغير في القليوبية
a 2 : إنشاء مصنع متوسط في بني سويف
a 3 : إنشاء مصنع كبير في الاسكندرية

حالات الطبيعة : Q j

Q 1 : أمكانية بيع / 50 / ألف وحدة
Q 2 : أمكانية بيع / 75 / ألف وحدة
Q 3 : أمكانية بيع / 125 / ألف وحدة
Q 4 : أمكانية بيع / 150 / ألف وحدة
Q 5 : أمكانية بيع / 250 / ألف وحدة

ثانياً : بناء جدول النتائج الشرطية (العوائد) :

Q j / A i	**50** Q 1	**75** Q 2	**125** Q 3	**150** Q 4	**250** Q 5
100 a 1	400	600	775	750	650
200 a 2	375	652.5	937.5	1125	1450

300 a 3	350	525	875	1050	1750

الأرقام في المصفوفة بالآلاف .
كيف تم ملئ المصفوفة :

المصنع الصغير في القليوبية :

ت.ث للوحدة 50000/100000 = 0.5
ت.ك = ت.ث + ت.م = 1.5 + 0.5 = 2
الربح = السعر – ت.ك = 10 – 2 = 8
الخسارة في حالة عدم تلبية الطلب /1/ جنية للوحدة

X 11 : 50 (8) = 400
X 12 : 75 (8) = 600
X 13 : 100(8) + 25 (-1) = 775
X 14 : 100(8) + 50 (-1) = 750
X 15 : 100(8) + 150 (-1) = 650

المصنع المتوسط في بني سويف :

ت.ث للوحدة 80000/200000 = 0.4
ت.ك = ت.ث + ت.م = 2.1 + 0.4 = 2.5
الربح = السعر – ت.ك = 10 – 2.5 = 7.5

تصبح الخلايا :

X 21 : 50 (7.5) = 375
X 22 : 75 (7.5) = 562.5
X 23 : 125 (7.5) = 937.5
X 24 : 150 (7.5) = 1125
X 25 : 200 (7.5) + 50 (-1) = 1450

المصنع الكبير في الاسكندرية :

ت.ث للوحدة $120000/300000 = 0.4$

ت.ك = ت.ث + ت.م = $2.6 + 0.4 = 3$

الربح = السعر – ت.ك = $10 - 3 = 7$

تصبح الخلايا :

$$X\ 31 : 50\ (\ 7\ ) = 350$$
$$X\ 32 : 75\ (\ 7\ ) = 525$$
$$X\ 33 : 125\ (\ 7\ ) = 875$$
$$X\ 34 : 150\ (\ 7\ ) = 1050$$
$$X\ 35 : 250\ (\ 7\ ) = 1750$$

وبعد تشكيل مصفوفة العوائد نطبق المعايير الخمسة لإيجاد القرار الأمثل إذاً النقطة الأساسية هي في تشكيل المصفوفة .

واجب :

أوجد القرار الأمثل وفق المعايير الخمسة لاتخاذ القرار في حالة عدم التأكد بالنسبة لمصفوفة العوائد في المثال السابق .

(الحالة التطبيقية الأولى) :

ترغب شركة صناعية في شراء آلة لإنتاج سلعة محددة ولديها ثلاث بدائل وهي :شراء آلة كبيرة طاقتها /2000/وحدة أسبوعياً والتكاليف الثابتة السنوية /100/ ألف جنية أما التكاليف المتغيرة /13/ جنية للوحدة الواحدة , شراء آلة متوسطة طاقتها /1280/وحدة أسبوعياً و ت.ث /80/ ألف جنية و ت.م /14.75/ جنية , شراء آلة صغيرة طاقتها /500/ وحدة أسبوعياً و ت.ث /40/ ألف جنية و ت.م /15.4/ فإذا كانت مستويات الطلب المتوقعة أسبوعياً هي 500 , 1500, 1800 وحدة وكان سعر البيع

للوحدة في السوق /20/ جنية والوحدة التي لا تباع تقدر /13/ جنية قبل استبعاد تكلفتها .

والمطلوب :

1- تحديد مجموعة الأفعال الممكنة ومجموعة حالات الطبيعة .
2- بناء جدول النتائج الشرطية (مصفوفة العوائد) .
3- تحديد القرار الأمثل وفق المعيار المتفائل و معيار هرويز .

علماً أنّ السنة /50/أسبوعاً .

الفصل السابع
نظرية صفوف الانتظار

1. *مقـدّمــة* :

يعد الانتظار حالة يمر بها معظم الناس و يلاحظها، فتراهم في مواقف الحافلات أو أمـام شـبابيك الحجـز وكثيـراً مـا يشـاهد المـرء الازدحـام فـي سـاحات السـكك الحديديـة، الطـائرات وهـي تحـوم فـي الجـو انتظـاراً للهبـوط، والمـارة يزدحمـون عنـد الإشــارات المرورية في الشوارع، والرزم المرسلة والرسائل مكدسة في مراكز توزيع البريد.

يلاحظ المرء كذلك السفن وهي تنتظر في الموانئ لتفريغ حمولتها أو تنتظر دورها في التحميـل، شـراء تـذكرة للمسـرح أو الحصـول علـى الخدمـة مـن أحد نوافذ الخدمـة فـي المصـارف، شـراء بعض الحاجيات مـن إحدى المؤسسـات أو قد تصـطف السـيارات أمـام محطة البنزن أو عند دفع الرسوم لعبور الجسور أو الأنفاق و غيرها من الحالات .

يُجمع الكثير من الناس أن خطوط الانتظـار هـي ظـاهرة واضـحة لا يمكـن تجنبهـا في المدن الحديثة، إذ يمكننا تعداد العشـرات مـن المواقـف التـي نجد فيهـا خطـوط الانتظـار بصورة يومية، ولا تقتصـر خطـوط الانتظـار علـى الأفـراد فـي حيـاتهم اليوميـة، بـل نجدها أيضاً في المنظمات الاقتصادية حيث تعد إحدى سمات العمل الواضحة بها.

2. *أهمية النظرية* :

تؤدي كـل مـن هـذه الحـالات وغيرهـا إلـى وجـود مشـكلة الانتظـار، وتعتبـر نظريـة صـفوف الانتظـار(الأرتـال) ذات أهميـة خاصــة نتيجـة للتكـاليف الناجمـة عـن الانتظـار والتشغيل، وتهدف نظريـة صـفوف الانتظـار والتـي يكـون فيهـا الانتظـار علـى شكل صـف واحد أو ما يسمى "خط الانتظار " أو "رتل الانتظـار" إلـى تحديد الفتـرة الزمنيـة للانتظـار على المدى البعيد وجعل تلك الفترة أقل ما يمكن، وكذلك تحويل فترة الانتظـار إلـى مقيـاس مادي وهو تكلفة الانتظار ودراسة أسلوب الموازنـة بين تكلفة الانتظـار وتكلفـة اتخـاذ قـرار

لتقليل وقت الانتظار كإنشاء مراكز أخرى لأداء الخدمة أو توسيع مدرج أو فتح ورشة أخرى وغيرها من الحلول .

تعود دراسة خطوط الانتظار أو نظرية الصفوف إلى أعمال مهندس الهواتف الدانمركي ايرلانغ A.K.Erlang الذي بدأ عام 1910 بإجراء تجارب تتعلق بمشكلة الازدحام في مركز تبادل المكالمات الهاتفية عن طريق العاملين في المقسم في مراكز الهاتف، إذ وجد أن طالبي المكالمات غالباً ما يتعرضون لبعض التأخير خلال الفترات التي تكثر فيها المكالمات الهاتفية وذلك بسبب عدم قدرة العاملين على تلبية الطلبات بشكل متزامن مع السرعة التي تحدث بها، وقد عمد Erlang إلى حساب مدة هذا التأخير بالنسبة للعامل الواحد في المقسم، ثم امتدت دراسته و النتائج الخاصة بها لتشمل عدداً من العاملات، وقد استمر العمل على تطوير حركة المكالمات الهاتفية على نفس الأسس التي أوجدها Erlang، وبعد نهاية الحرب العالمية الثانية توسع استخدام هذا الأسلوب ليشمل عدداً من الحالات العامة التي تتصف بوجود خطوط الانتظار فيها.

3. ***التطبيقات العامة لنظرية صفوف الانتظار :***

يستخدم أسلوب صفوف الانتظار بشكل واسع في المنظمات الصناعية للتغلب على مشاكل الانتظار التي ترافق بعض الأعمال فيها، إذ يستخدم لمعالجة مشاكل صيانة الآلات وإصلاحها حين يتعطل عدد من الآلات في أوقات مختلفة وتشكل بذلك خطوط الانتظار للإصلاح المطلوب بوساطة عمال الصيانة والإصلاح، فتطبق هذا الأسلوب لاتخاذ القرار المناسب في تحديد عمال الصيانة الذي يجعل تكاليف الانتظار أقل ما يمكن .

يستخدم هذا الأسلوب لتنظيم العمل في مستودعات قطع الغيار والعدد، بحيث يخفف من عدد العمال الذين يقفون في صفوف طويلة أمام المستودع بانتظار الحصول على ما يلزمهم من قطع الغيار، وذلك عن طريق زيادة عدد الموظفين في المستودع مما يؤدي إلى الإسراع في أداء الخدمة ويساعد على تشغيل العمال بدلاً من إضاعة وقتهم في خط الانتظار و بالتالي تخفيض تكاليف الإنتاج الكلية .

كذلك يستخدم في تحديد العدد المناسب من الأرصفة التي تستقبل السفن في الموانئ وسيارات نقل البضائع وذلك بهدف تخفيض التكاليف الكلية ، إذ أن تكاليف إقامة الأرصفة وغرامات التأخير في تفريغ البضاعة تكون كبيرة، وعلى المسؤولين الموازنة بين تكاليف الأرصفة وتكاليف غرامات التأخير بحيث يـُتخذ القرار المناسب بتحديد عدد الأرصفة التي يجب إقامتها بحيث تكون التكاليف الكلية أقل ما يمكن .

كما أن هذا الأسلوب يستخدم بشكل كبير في مجالات متعددة منها : تحديد عدد العاملين المناسب في نوافذ الخدمة في مكاتب البريد أو في المصارف أو في نوافذ دفع حسابات الزبائن في المحلات التجارية الكبرى والمؤسسات وذلك لضمان التشغيل الاقتصادي لهذه المحلات وتقديم الخدمة المناسبة للزبائن ، كما يطبق هذا الأسلوب في محطات الوقود وخدمة السيارات وفي المطاعم والكافيتريات ومراكز إطفاء الحريق حيث يراعى تأمين مستوى مناسب من الخدمة لأفراد المجتمع مع تحمل أقل النفقات الممكنة في هذه المنظمات .

4. ***عناصر نظم الصفوف الانتظار :***

يمكن التعبير بصورة عامة عن أسلوب الصفوف أو خطوط الانتظار حسب الشكل المبين أدناه الذي يوضح وجود الوحدات أو طالبي الخدمة سواء أكانوا أفراداً أم أشياء، هذه الوحدات تصل إلى نظام الصف المعبر عنه بمستطيل متقطع ثم تقف في الصف بانتظار دورها للحصول على الخدمة وبعدها تنتقل إلى محطة أداء الخدمة ثم تغادر كل وحدة النظام بعد الحصول على الخدمة المطلوبة .

نظام خطوط الانتظار

لدراسة خطوط الانتظار لا بد من التمييز بين متوسط عدد الوحدات (العملاء) الموجودة في النظام الذي تؤدى فيه الخدمة L ، ومتوسط عدد الوحدات الموجودة في خط

الانتظار للحصول على الخدمة L_q ، إذ من الطبيعي أن يكون متوسط عدد الوحدات الموجودة في النظام أعلى من متوسط عدد الوحدات التي تنتظر في الصف للحصول على الخدمة ذلك لأنها تشمل الوحدات الواقفة في خط الانتظار إضافة إلى الوحدات التي تتلقى الخدمة، كذلك من الضروري أن نميز بين متوسط وقت انتظار الوحدة الواحدة في خط الانتظار W_q ، ومتوسط وقت انتظار الوحدة الواحدة في النظام W ، إذ من الطبيعي أن تكون قيمة W أكبر من قيمة W_q .

1- طلاب الخدمة : قد يكون الوصول من عدد لانهائي من طلاب الخدمة أو قد يكون من عدد معروف من طلاب الخدمة .

2- خصائص الوصول : تشير إلى الطريقة التي تصل بها الوحدات إلى محطات تأدية الخدمة، فقد يتم الوصول بطريقة يمكن التحكم بها حين تُـغلق إحدى المؤسسات أبوابها قبل نصف ساعة من وقف عملية البيع لتتمكن من خدمة العملاء الموجودين داخل المؤسسة، أو قد يتم الوصول بشكل لا يمكن التحكم به كما في وصول العملاء لزيارة أحد المعارض. أما بالنسبة لعدد الوحدات التي تصل إلى نظام الخدمة فيمكن أن تصل بصورة إفرادية أو بصورة جماعية . كما يمكن أن يتصف الوصول بوجود طالبي الخدمة الذين لديهم القدرة على الانتظار في الخط للحصول على الخدمة وطالبي الخدمة الذين يملون من الانتظار حيث يتركون الخط بعد فترة قصيرة دون الحصول على الخدمة. ويمكن أن تتبع عملية الوصول طريقة منتظمة يمكن معرفتها وتحديدها بدقة كما في وصول الأجزاء والقطع المطلوبة إلى خط تجميع السيارات وفق توقيت معروف حيث تفصل بين وصول كل قطعة وأخرى فترات زمنية متساوية ومعروفة أو فترات زمنية غير متساوية لكنها معروفة فيتم تجميع هذه القطع وإرسالها وفق التوقيت الموضوع كي تجري عليها عملية التجميع التالية. وفي الواقع فإن عملية الوصول في أغلب محطات أداء الخدمة تتبع طريقة عشوائية أي غير منتظمة لا يمكن تحديدها بصورة مسبقة ولكن احتمالاتها معروفة. هذه الاحتمالات تخضع لتوزيعات احتمالية متعددة لكل منها صفاته الخاصة مثل توزيع بواسون والتوزيع الأسي وتوزيع ايرلانغ .

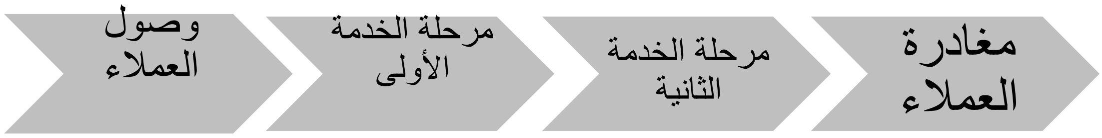
3 - نظام الصف : يشير إلى الأسلوب أو مجموعة العناصر التي تتبع في خدمة العملاء فهناك :

- قاعدة الخدمة الواردة أولاً تـُخدم أولاً **FIFO** وهذا المبدأ هو السائد في معظم أنظمة الصفوف، كما في خدمة العملاء حين شراء التذاكر للمباريات أو دفع قيمة المشتريات في إحدى المؤسسات أو محطات الوقود وغيرها.
- قاعدة الخدمةالواردة أولاً تـُخدم أخيراً **LIFO** يعني أن العميل الذي يأتي أخيراً يُخدم أولاً حسب عكس ترتيب الوصول، ويستخدم هذا المبدأ في معظم أنظمة التخزين حيث يتم استهلاك البضاعة التي خزنت أخيراً لأنها تكون في متناول اليد.
- قاعدة الخدمة العشوائية **SIRO** حيث لا يتبع نظام محدد في خدمة الزبائن فمن يطلب الخدمة يحصل عليها ، ويتم اختيار العناصر بشكل عشوائي لخدمتها بغض النظر عن وقت وصولها كما هي الحال في بعض عمليات إدخال البيانات.
- قاعدة الخدمة للأفضلية **PRI** فتعطى الأولوية في تقديم الخدمة مثلاً للعميل الذي قام بحجز مسبق، أو لعلاج المرضى في المستشفيات في حالات الإسعاف أو للعملاء الذين يرتدون اللباس العسكري الرسمي لأنهم على رأس عملهم وللوقت أهمية لديهم، أو قد تكون الأفضلية حسب ترتيب أو مقياس معين.

4 - عدد مراحل الخدمة ومحطاتها : تشير إلى المراحل التي تمر بها الخدمة وإلى الترتيب المادي لمحطات تأدية الخدمة، فقد يمر طالب الخدمة بمحطة واحدة للحصول على الخدمة المطلوبة كما في شراء البطاقات لدخول المتحف، إذ يتم الوصول إلى نظام أداء الخدمة وتلقي الخدمة على مرحلة واحدة ثم مغادرة النظام كما في الشكل التالي :

نظام أداء الخدمة بمرحلة واحدة

أو قد يمر طالب الخدمة بأكثر من مرحلة للحصول على الخدمة كما في تجهيز إحدى المعاملات بعد مرورها بأكثر من دائرة رسمية ، إذ يتم الوصول إلى نظام أداء الخدمة وتلقي الخدمة على عدة مراحل ثم مغادرة النظام كما في الشكل التالي، إن دراسة أسلوب أداء الخدمة وتحليله على عدة مراحل يعد من الأمور الصعبة والمعقدة.

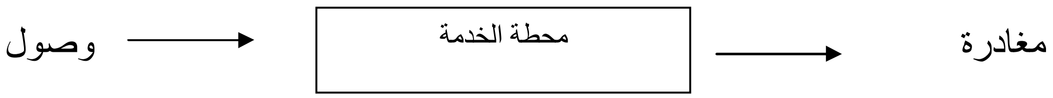


نظام تأدية الخدمة بعدة مراحل

إن تأدية الخدمة على مرحلة واحدة يمكن أن تأخذ عدة أشكال بحيث تـُحدد ترتيب خطوط الانتظار في نظام أداء الخدمة، ونستطيع أن نميز بين ثلاثة أشكال رئيسة لتأدية الخدمة في هذه المرحلة الواحدة وهي :

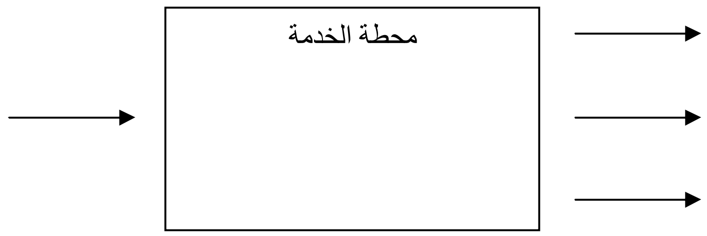
1. وجود قناة أو محطة واحدة لتأدية الخدمة مع وجود خط انتظار واحد أمامها.
2. وجود عدة محطات أو قنوات لأداء الخدمة مع وجود خط انتظار أمام كل محطة، وتمثل كل منها محطة واحدة وخط انتظار واحد لكنها مرتبة بصورة متوازية .
3. وجود عدة محطات لتأدية الخدمة مع وجود خط انتظار واحد .

(1)



(2)

(3)



5 - خصائص الخدمة : وتشير إلى طول وقت أداء الخدمة المطلوب بالنسبة للعملاء. فقد يكون طول أداء الخدمة ثابتاً بالنسبة لجميع العملاء، كما في غسيل السيارات في المغسل الأوتوماتيكي حيث تكون فترة الغسيل واحدة بالنسبة لجميع السيارات القادمة إلى المغسل. وقد يكون وقت أداء الخدمة غير ثابت، إذ أن كل عميل قد يتطلبوقتاً مختلفاً لتقديم الخدمة اللازمة له كما في خدمة العملاء في المطاعم أو قبض قيمة مشتريات الزبائن في أحد المحلات التجارية، غالباً ما يكون معدل الخدمة ومعدل الوصول غير معروفين بصورة مسبقة وإنما يخضعان للافتراضات أو الاحتمالات، وهذا يتطلب أن يتم التعبير عن أزمنة الوصول و الخدمة الاحتمالية والعشوائية باستخدام التوزيعات المناسبة .

6 - معدل الوصول : يشير إلى عدد الوحدات التي تصل إلى نظام تأدية الخدمة خلال فترة معينة من الزمن، إذ يـُعبـّر عنه بقولنا وصول 15 عميل في الساعة مثلاً .

7 - معدل الخدمة : يشير إلى عدد الوحدات التي تتم خدمتها خلال فترة معينة من الزمن، إذ يـُعبـّر عنه بالقدرة على خدمة 20 عميل في الساعة مثلاً.

5. ***تصنيف أنظمة صفوف الانتظار :***

يتم التصنيف وفق عدة مؤشرات :

1 – تصنف الأنظمة إلى أنظمة خدمة دون صف انتظار فطلب الخدمة الواصل إلى النظام في لحظة تكون فيها جميع الأقنية مشغولة يغادر النظام دون تلقي للخدمة ولا تـُقدم له الخدمة لاحقاً مثل طلب رقم هاتف ما إذا كان الرقم مشغولاً فإن الطلب يلقى الرفض ويغادر دون تلقي الخدمة، وأنظمة خدمة مع صف انتظار فطلب الخدمة الواصل إلى النظام في لحظة تكون فيها جميع الأقنية مشغولة لا يغادر النظام بل يقف في صف الانتظار على أمل الحصول على الخدمة لاحقاً ، وتصنف أنظمة الخدمة مع صف انتظار إلى عدة أنواع *صفوف الانتظار مـــحـــدودة السعة

*صفوف الانتظار غير محدودة السعة

وتتحدد السعة تبعاً لطول أو زمن الانتظار .

2 – تُصنّف أيضًا إلى أنظمة الخدمة المفتوحة كثافة تدفق طلبات الخدمة على النظام لا ترتبط بحالة نظام الخدمة أي لا تتأثر بعدد الأقنية المشغولة في النظام (عدد الطلبات في النظام)، وأنظمة الخدمة المغلقة كثافة تدفق طلبات الخدمة على النظام ترتبط بحالة النظام مثلاً إذا كان عامل الصيانة يخدم عدداً محدّداً من الآلات التي تحتاج لصيانة من وقت لآخر فإن كثافة الطلب من جهة الآلات يتوقف على عدد المعطل منها والذي يحتاج للحصول على الخدمة .

3 – مثلوية عمل أنظمة الخدمة : يمكن أن تقوم على عدة وجهات نظر وفق الجهة صاحبة العلاقة أو وفق الجهة طالبة الخدمة

6. ***بناء أنظمة صفوف الانتظار ومتغيراتها:***

يعتبر الهدف الأساسي من دراسة أنظمة صفوف الانتظار هو إيجاد **مقاييس الفعّالية**التي تقيس لنا فعّالية أو أداء هذه الأنظمة، حيث نعـّرف ما يلي :

$N_{(t)}$: المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الزبائن في النظام حتى اللحظة t حيث $t \geq 0$

$P_{n(t)}$:التوزيع الاحتمالي لعدد الزبائن في النظام عند الزمن t أي :

$$P_{n(t)} = pr\{ N_{(t)} = n \}$$

لكن العديد من صفوف الانتظار تعتمد في بداية عملها على الزمن t لكنها تصل بمرور الزمن إلى حالة الاستقرار أي يصبح كل من المتغير العشوائي $N_{(t)}$ ودالة التوزيع الاحتمالية $P_{n(t)}$ مستقلان عن الزمن ونرمز لهما N و P_n حيث:

$$P_n = P(n) = pr\{N=n\}$$

7. النموذج الأول :M/M/1/GD/∞/∞

هذا النظام هو نظام صفوف ذو قناة واحدة فيه الزمن الفاصل بين وصولين متتاليين خدمة الزبائن حسب مبدأ عام غير محدد GD أما طاقة النظام ومنبع زبائنه فهو غير محدد، سنوجد أولاً P(n) لهذا النظام ومن ثم مقاييس الفعالية له.

*إيجاد P(n) :

كما هو واضح فإن النظام هو نظام وفاة وولادة فيه $\mu_n = \mu$ و $\lambda_n = \lambda$ من أجل جميع قيم n

فإن: $$P(n) = P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \qquad n \geq 1$$

لكن لدينا ما يسمى بعامل الخدمة ρ حيث : $$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

عندئذ $$P(n) = \rho^n P_0 \qquad n \geq 1$$

أما $$P(0) = P_0 = 1-\rho$$

وبالتالي فإن $$P(n) = (1-\rho)\rho^n$$

*إيجاد مقاييس الفعالية : $$L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

$$L_q = \rho L \quad \text{أو} \quad L_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$W = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

والمثال التالي يوضّح جميع المفاهيم السابقة :

تمتلك محطة لخدمة السيارات جهازاً واحداً لغسيل السيارات، تصل هذه السيارات إلى المغسل وفق توزيع بواسون بمعدل 5 سيارات في الساعة. وقد وجد أن الزمن اللازم لغسيل السيارة الواحدة يتبع التوزيع الأسي بمعدل 10 دقائق للسيارة. بافتراض وجود عدد كافٍ من مواقف السيارات في المحطة فالمطلوب:

1) إيجاد التوزيع الاحتمالي لعدد السيارات التي تتواجد في المحطة.
2) إيجاد العدد المتوقع للسيارات التي تتواجد في المحطة والعدد المتوقع للسيارات التي تتلقى خدمة الغسيل.
3) ما هي نسبة الوقت الذي تتوقف فيه المحطة عن الغسيل.
4) ما هو الزمن المتوقع لانتظار سيارة حتى تنتهي من الغسيل؟ وما هو الزمن المتوقع لانتظار سيارة حتى تبدأ خدمة الغسيل؟ وما هو احتمال أن ينتهي غسيل سيارة خلال *10 دقائق على الأقل * 10 دقائق على الأكثر
5) لنفترض أن المحطة ترغب بتقليص المكان المخصص لوقوف السيارات في المحطة فما هو عدد المواقف التي يجب أن تحتفظ بها بحيث إن 90% من الزبائن على الأقل سيجدون مواقف لسياراتهم حين وصولهم.
6) لنفترض أن المحطة احتفظت بأربعة مواقف فقط وأن الزبائن الذين لا يجدون موقفاً لسياراتهم سوف ينصرفون فما هي نسبة هؤلاء الزبائن؟

الحــل:

حسب معطيات المثال فإن نموذج نظام محطة الغسيل هو **M/M/1/GD/∞/∞** فيه :

λ=5ساعة، μ=6 ساعة، ومنه ρ= 6/5 < 1 ومنه يكون:

$$P(n) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^n , \quad n \geq 0$$

والعدد المتوقع للسيارات التي تتواجد في المحطة $L = \frac{5}{6-5} = 5$ سيارة

وعدد السيارات في صف الانتظار $L_q = \frac{5}{6}(5) = \frac{25}{6}$ سيارة

أما العدد المتوقع للسيارات التي تتلقى خدمة الغسيل $L - L_q = 5 - \frac{25}{6} = \frac{5}{6}$

ونسبة الوقت الذي تتوقف فيه المحطة عن العمل $P(0) = \frac{1}{6} \approx 17\%$

والزمن المتوقع لانتظار سيارة ما حتى تنتهي من خدمة الغسيل هو W وقيمتها :

$W = \frac{1}{6-5} = 1$ ساعة

أما الزمن المتوقع لانتظار سيارة ما حتى تبدأ خدمة الغسيل هو W_q وقيمتها :

$W_q = \frac{5}{6(6-5)} = 5/6$ ساعة

1) احتمال أن ينتهي غسيل السيارة خلال عشر دقائق $= \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$ ساعة على الأكثر هو

$$W\left(\frac{1}{6}\right) = pr\{T \leq \frac{1}{6}\}$$

نجد $W\left(\frac{1}{6}\right) = 1 - e^{-1/6}$

2) احتمال أن ينتهي غسيل سيارة ما خلال عشر دقائق على الأقل هو :

$$pr\{T \geq 1/6\} = 1 - W(1/6) = e^{=1/6}$$

لنرمز لعدد المواقف التي يجب أن تحتفظ بها المحطة لتأمين مواقف لـ 90% على الأقل من الزبائن . إن احتمال أن يجد زبون ما موقفاً من المواقف التي عددها m هو 90% على الأقل أو أن $P(0) + P(1) + P(2) + \ldots + P(m) \geq 0.9$

لكن $\sum_{n=0}^{m} p(n) = (1-\rho) \sum_{n=0}^{m} \rho n = (1-\rho) \frac{1-\rho}{1-\rho} = 1 - \rho^{m+1}$

لذا علينا أن نبحث عن قيمة m التي تحقق :

$$1-\ \rho^{m+1} \geq 0.9 \leftrightarrow \rho^{m+1} \leq 0.1 \leftrightarrow$$

$$(m+1) \log \rho \leq \log (0.1) = -1 \leftrightarrow$$

$$(m+1)(-0.08) \leq -1 \rightarrow m \geq 11.63 \approx 12$$

لذا يجب على الإدارة أن تحتفظ بـ 12 موقف للسيارات.

نسبة الزبائن الذين ينصرفون هنا تساوي احتمال أن يجد زبون ما، ما لا يقل عن خمسة (5) زبائن (4 زبائن + زبون يتلقى الخدمة) أي يساوي $pr\ (\ N \geq 5\ )$ ويكون

$$pr\{N \geq 5\} = \rho^5 = \left(\ \frac{5}{6}\ \right)^{5} \approx 0.40$$

أي أن تقليص عدد المواقف في المحطة لأربعة سيؤدي إلى خسارة 40% من الزبائن.

8. النظام M/M/1/GD/K/∞ :

مع أن الفرق الوحيد بين النظامين هو أن طاقة النظام الحالي محدودة بـ K من الزبائن إلا أن هذا الفرق سيؤدي إلى فروق كبيرة في المعادلات الرياضية الخاصة بـ P(n) ومقاييس الفعالية ، ونظام الصفوف الحالي هو كسابقه نظام صفوف ذو ولادة بمعدل $\mu_n = \mu$ و$\lambda_n = \lambda$ من أجل جميع قيم n ، وتصبح المعادلات كالتالي:

*حساب P(n):

بافتراض $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ تبقى العلاقة صحيحة إلا أنها تصبح بالشكل التالي:

$$\sum_{n=1}^{k} \rho^{n} = \quad K+1 \ ;\ \rho=1$$

$$\frac{1-\rho}{1-\rho} \ ;\ \rho \neq 1$$

وبالتالي فالسلسلة المقابلة متقاربة مهما تكن قيمة ρ والذي يعني بدوره أن الحل في حالة الاستقرار لهذا النظام موجود دوماً (من أجل أي قيمة لـ ρ) حيث نجد عندها أن :

$$P_0 = \frac{1}{1+K} \quad ;\rho=1$$

$$\frac{1-\rho}{1-\rho} \quad ;\rho\neq 1$$

وبالتالي يكون :

$$P(n) = \frac{1}{1+K} \quad ;\rho=1$$

$$\frac{(1-\rho)\rho}{1-\rho} \quad ;\rho\neq 1$$

$$0 \leq n \leq K$$

*مقاييس الفعالية:

عندئذ $\rho=1$:

$$L = \sum_{n=0}^{k} n/(k+1) = \frac{k}{2}$$

عندئذ $\rho\neq 1$ بملاحظة أن $n\rho^{n-1}$ هي مشتق ρ^n نجد :

$$L=\sum_{n=0}^{k} n\rho\, P(0) = P(0)\rho \sum_{n=0}^{k}(n\rho \quad) = P_0(\sum_{n=0}^{k} \rho \quad)$$

$$= P_0\, \rho\, (\frac{1-\rho}{1-\sigma})$$

وبإجراء الاشتقاق وتعويض P_0 بقيمتها وإصلاح الناتج نجد

$$L= \frac{\rho[1-(k+L)\rho \quad +k\rho \quad]}{(1-\rho)(1-\rho \quad)}$$

أيضاً

$$L_q \sum_{n=1}^{k}(n-1)P(n) = \sum_{n=1}^{k} P(n) - \sum_{n=1}^{k} P(n)$$

$$= \sum_{n=o}^{k} nP(n) - (1-P\ ) = L - 1 + P$$

ومن أجل $\rho\neq1$ نجد أن $$L_q=L-\frac{\rho(1-\rho\ )}{1-\rho}$$

وبما أن طاقة النظام محدودة بـ K من الزبائن فإن حساب أزمنة الانتظار يتوقف على معدل الزبائن الذين يلحقون فعلاً بالنظام أي على $\bar{\lambda}$ ولحسابها نلاحظ أن نسبة الزبائن الذين لا يلحقون بالنظام تساوي احتمال أن يحوي النظام زبوناً (طاقته مكتملة) ويساوي P(K). وبالتالي فإن نسبة الزبائن الذين يلتحقون فعلاً بالنظام هي 1-P(K) ومنه فإن $\bar{\lambda} = [1-P(K)]\lambda$

وعندئذٍ $$W = L / \bar{\lambda}$$

و $$W_q = L_q /\bar{\lambda}$$

بالعودة إلى محطة غسيل السيارات في **المثال السابق** لنفترض أن هذه المحطة تحوي أربعة مواقف فقط فالمطلوب :

1) كم عدد الزبائن الذين تخسرهم المحطة في الساعة نتيجة لمحدودية طاقتها.
2) ما هو الزمن المتوقع لانتظار سيارة حتى يتم غسلها.
3) ما هو احتمال أن تدخل السيارة في الغسيل فور وصولها.
4) ما هو الزمن المتوقع لانتظار سيارة حتى تدخل في عملية الغسيل.
5) ما هو العدد المتوقع للمواقف المشغولة.

الحــلّ :

بما أن $\bar{\lambda}$ (λ) تمثل عدد الزبائن الفعلي الذين يصلون إلى النظام في وحدة الزمن ونجد :

$$\lambda - \bar{\lambda} = \lambda\, P(K)$$

وبالنسبة لمثالنا طاقة النظام هي K = 5 (أربعة مواقف + سيارة في الغسيل) وبما أن

$\rho=\frac{5}{6}\neq 1$ ولذا فإن

$$P\ (5) = \frac{\left(1-\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{5}\right)}{1-\left(\frac{5}{6}\right)} \approx 0.1$$

لذلك فإن المحطة تخسر في الساعة زبون $\lambda - \bar{\lambda} = 0.1\ (5) = 0.5$ أو زبوناً كل ساعتين أو 5زبائن في يوم عمل قدره عشر ساعات .

هذا الزمن هو W ومنه لدينا $\lambda = (1-0.1)(5) = 4.5$ سيارة في الساعة .

و أيضاً نجد

$$L = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)[1-6\left(\frac{5}{6}\right) \ +5\left(\frac{5}{6}\right) \ \ ]}{\left(\frac{1}{6}\right)[1-\left(\frac{5}{6}\right) \ ]}$$

ويكون $W = \frac{1.97}{4.5} \approx 0.438$ ساعة $= 26.3$

تدخل السيارة في عملية الغسيل فوراً إذا كان النظام خالياً واحتمال ذلك هو P_0.

ونجد أن هذا الاحتمال $P_0 = \frac{1-5/6}{1-\left(\frac{5}{6}\right)} = 0.2505881$

هذا الزمن هو W_q وبما أن W قد حسبت سابقاً فإننا نحسب W_q فنجد :

$$W_q = W - \frac{1}{\mu} = 0.438 - \frac{1}{6} \approx 0.271 \qquad = 16.3$$

العدد المتوقع للمواقف المشغولة ليس إلا L_q ونجد :

$$L_q = 1.97 - \frac{\frac{5}{6}\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)\right]}{1-\left(\frac{5}{6}\right)} \approx 1.22$$

9. ***<u>التكاليف في نماذج الانتظار</u>*** :

تقسم هذه التكاليف إلى ما يلي :

1- **تكاليف تقديم الخدمة إلى الزبائن:** مثل تكاليف التجهيز، تكاليف المواد والطاقة، تكاليف القائمين على الخدمة، تكاليف الصيانة والإصلاح، تكاليف التأمين والضرائب والإيجار وغيرها من التكاليف، ومن الواضح فإن هذه التكاليف تزداد بازدياد مستوى الخدمة فالتابع هنا متزايد.

2- تكاليف الانتظار:تشمل التكاليف الناتجة عن خسارة الزبائن الذين ينفذ صبرهم نتيجة طول الانتظار فيغادرون صف الانتظار، ويؤدي ذلك بشكل عام إلى سوء سمعة المنظمة وبالتالي خسارة الزبائن، ومن جهة أخرى فقد يؤدي هذا الانتظار لخسارة كبيرة للزبون نفسه مثل خسارة المريض لحياته فيما لو تأخر إسعافه في المستشفى، والخسائر الناتجة عن محدودية النظام حيث يخسر الزبائن الذين لا يستطيعون الدخول.

من السهل تقدير التكاليف ، إلا أنه من الصعب جداً تقدير تكاليف الانتظار وهذه التكاليف تزداد بتناقص مستوى الخدمة أو هي دالة متناقصة في مستوى الخدمة.

<u>10. الأهداف في نماذج الانتظار:</u>

قد يكون الهدف في بعض النماذج جعل التكاليف الكلية أقل ما يمكن وعندئذ يكون المستوى الأمثل للخدمة هو ذلك المستوى الذي يقابل أقل قيمة للتكاليف الكلية، وقد يكون الهدف تحقيق مستوى معين من الخدمة دون النظر إلى التكاليف، وقد يكون الهدف تحقيق مستوى مناسب من الخدمة بمستوى معقول من التكاليف وذلك من خلال موازنة بين تكاليف الانتظار وتكاليف تقديم الخدمة.

في الحقيقة فإن صعوبة تقدير تكاليف الانتظار تجعل من الصعب تقدير تكاليف نماذج الصفوف بصورة دقيقة. ومن هنا فإن التركيز في نماذج الصفوف يكون على إيجاد مقاييس الفعالية لنظام الصفوف قيد الدراسة ليتم من خلالها دراسة خصائص ومميزات هذا النظام .

11. إيجاد معدل الخدمة الأمثل لنظام القناة الواحدة:

لنفترض أن لدينا نظام صفوف انتظار ذو قناة واحدة ومعدل وصول الزبائن إليها هو λ ومعدل الخدمة فيها هو μ ولنحاول تحديد القيمة المثلى لـ μ التي تجعل التكاليف الكلية لهذا النموذج من نماذج صفوف الانتظار أقل ما يمكن، هنا نميز حالتين:

النموذج هو M/M/1/FIFO/∞/∞ :

عندئذٍ تقتصر تكاليف الانتظار على التكاليف الناتجة عن الانتظار في النظام أو في صف الانتظار، فإذا رمزنا α للتكاليف الناتجة عن انتظار زبون واحد في وحدة من الزمن فإن تكاليف الانتظار ولنرمز لها بـ C_w تساوي α مضروبة بالعدد المتوقع للزبائن في النظام (أو العدد المتوقع للزبائن في صف الانتظار) أي :

تكاليف الانتظار في وحدة الزمن $C_w = \alpha L = \alpha \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$

(إذا اعتبرنا الانتظار في صف الانتظار هو المهم فإن $C_w = \alpha L_q$)

أما تكاليف تقديم الخدمة والتي سنرمز لها بالرمز C_s فإنها تزداد عادة بزيادة μ ، فإذا رمزنا β للتكاليف الناتجة عن زيادة μ بمقدار وحدة في وحدة الزمن فإن $C_s=\beta\mu$ تكاليف الخدمة في وحدة الزمن .

وبالتالي فإن التكاليف الكلية للانتظار والخدمة في وحدة الزمن سنرمز لها TC وتعطى كدالة في μ بالعلاقة :

$$TC(\mu) = \frac{\alpha\lambda}{\mu-\lambda} + \beta\mu$$

وهي دالة متصلة وقابلة للاشتقاق في μ، وبجعل المشتقة الأولى مساوية للصفر نحصل على قيمة μ التي تجعل $TC(\mu)$ أصغر ما يمكن وهي :

$$\mu = \lambda + \sqrt{\alpha\lambda / \beta}$$

ونلاحظ هنا أن معدل الخدمة μ يعتمد على معدل الوصول λ وعلى α و β وأن هذه القيمة لــ μ تحقق الشرط $\lambda<\mu$ الذي اشترط لاستقرار النظام فهي قيمة ممكنة ومثلى لـ μ وفقاً لمعيار تقليل التكاليف في هذا النظام.

النموذج هو $M/M/1/FIFO/K/\infty$:

والتكاليف في هذا النموذج هي نفسها التي في النموذج السابق بالإضافة إلى التكاليف الناتجة عن خسارة الزبائن نتيجة لمحدودية طاقة النظام بــ K من الزبائن، فإذا رمزنا γ للتكاليف الناجمة عن خسارة زبون واحد في وحدة الزمن فإن تكاليف خسارة الزبائن والتي سنرمز لها بالرمز C_s هي :

$$C_s = \gamma P(K)$$

ذلك لأن $P(K)$ ليس إلا عدد الزبائن الذين يخسرهم النظام في وحدة الزمن ، وعندئذ

$$TC(\mu) = \alpha L + \beta \mu + \gamma \lambda P(K)$$

حيث يمكن حساب L وأفضل قيمة لـ μ هي تلك التي تجعل $TC(\mu)$ أصغر ما يمكن.

وتجدر الملاحظة أنه يمكن تعديل هذه التكاليف بحيث تصبح طاقة النظام K متغير قرار إضافة إلى μ وذلك من خلال النظر إلى أن زيادة عدد الزبائن في النظام سيؤدي إلى زيادة في تكاليف النظام، فإذا فرضنا أن Θ هي تكاليف زبون واحد في وحدة الزمن فإن التكاليف الكلية في وحدة الزمن كما يلي :

$$TC(\mu,K) = \alpha L + \beta\mu + \gamma \lambda P(K) + \Theta K$$

وهنا يجب أن نبحث عن قيمتي μ , K اللتين تجعلان هذه الدالة أصغر ما يمكن .

مثال :

يعمل مركز للكمبيوتر *16* ساعة تقريباً وتصل البرامج إلى هذا المركز وفقاً لتوزيع بواسون بمعدل *500* برنامج في الساعة، وقد وجد أن زمن معالجة هذه البرامج يتبع التوزيع الأسي كما وجد أن تأخير أي برنامج ساعة واحدة يكلف *3.2* وحدة نقدية، ونتيجة ذلك نجد أن مركز الكمبيوتر يفكر في تسريع تنفيذ البرامج لديه ، وقد دلت الدراسات على أن كل زيادة بمعدل البرامج المعالجة بمقدار *100* برنامج في الساعة يكلف *400* وحدة

نقدية ، فالمطلوب : إلى أي مدى يجب أن يصل معدل البرامج المعالجة في مركز الكمبيوتر بحيث تجعل التكاليف اليومية الكلية لمعالجة البرامج أقل ما يمكن وما هي هذه التكاليف عندئذ؟

الـحــل:

بافتراض أن الساعة هي وحدة الزمن يكون : $\lambda= 500$ وحدة نقدية، $\alpha= 3.2$ *وحدة نقدية،* $\beta= 400 / 100 = 4$ *ونجد* :

$$\mu = 500 + \sqrt{\frac{(3.2)(500)}{4}} = 520 \text{ برنامج في الساعة}$$

وتكلفة ذلك $TC(\mu) = 2160$ *وحدة نقدية في الساعة*

و $34560 = (16)\ (2160) =$ *وحدة نقدية في الدقيقة* .

12. نموذج المستوى المأمول من الخدمة :

نظراً لصعوبة تقدير التكاليف في أنظمة الصفوف وخاصة منها تكاليف الانتظار فإن " نموذج المستوى المأمول من الخدمة " يعالج بين مشكلة الموازنة بين هدفين رئيسيين متعارضين هما :

1) التقليل من وقت انتظار الزبون في النظام والذي يساوي W
2) التقليل من النسبة المئوية لعطالة النظام والتي تساوي P_0 كأن نضع :

$$W \le u\ ,\ P_0 \le P$$

بحيث *إن* $u\ ,\ p$ تحققان ما يطمح أو يأمل به الزبون والنظام على الترتيب ، فلو أخذنا النظام $M/M/1/FIFO/\infty/\infty$ واعتبرنا أن كلا من Wو P_0 هو دالة في معدل الخدمة μ فإننا نبحث عن قيم μ التي تحقق المتراجحتين $W \le u\ ,\ P_0 \le P$

مـثـال :

بالعودة إلى مثال محطة غسيل السيارات ، إلى كم يجب رفع معدل الخدمة في المحطة بحيث لا تزيد نسبة الوقت الذي تتوقف فيه المحطة عن العمل على 15% ولا تزيد نسبة انتظار السيارات حتى انتهائها من الغسيل عن نصف ساعة ؟

الـحـل :

باعتبار الساعة وحدة للزمن فيكون $\lambda = 5$ ساعة ، أما μ فهو متغير القرار الواجب علينا تحديده بحيث إن $P_0 = \frac{1}{\mu} \le 0.15$ ، $W = \frac{1}{\mu - 5} \le 1/2$

وحل المتراجحة الأولى هو $\mu \geq \frac{1}{0.15} \approx 6.67$

وحل المتراجحة الثانية هو $\mu \geq 7$

وتعني هاتان النتيجتان أن رفع معدل الخدمة لـ 7 سيارات في الساعة (بدلاً من 6في المثال السابق) سيجعل وقت انتظار السيارة لا يزيد على نصف ساعة (بدلاً من ساعة في السابق) و سيجعل وقت عطلة محطة الغسيل لا يزيد على 15% من الوقت الكلي (بدلاً من % 17في السابق) .

قائمة المراجع

- حسين بلعجوز , نظرية القرار مدخل إداري وكمي , مؤسسة شباب الجامعة , الإسكندرية , 2008 .
- حسن علي مشرقي ,نظرية القرارات الإدارية مدخل كمي في الإدارة , دار المسيرة ,عمَّان , 1997/1417 .
- عفاف الدش (2012)، بحوث العمليات و أتخاذ القرارات، الجزء الاول ، الطبعة الثانية، الناشر (مكتبة عين شمس) ، القاهرة .
- بهاء سعد (2004) , بحوث العمليات في الإدارة , جهاز نشر و توزيع الكتاب الجامعي , جامعة حلوان
- ناديا أيوب نظرية القرارات الإدارية , مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية , 2005/1426 .

- **Richard Bronson(1982),"Operations Research", Schoum's Outline Series- Theory and Problems, M.c Graw – Hill - Book Company, New York.**
- **Taha H. (1997), "Operations Research: An Introduction", Prentice Hall, International, INC.**