رياضيات الأعمال

تأليف

دكتور/ هشام عبد التواب

قسم الإحصاء والرياضة والتأمين

كلية التجارة جامعة عين شمس

مقدمة

يهـدف هـذا المقـرر إلى تنميــة قــدرات الطالــب علـى معرفــة المفــاهيم والأسـاليب الأساسـية لرياضـيات الأعمـال وتطبيقاتهـا المختلفـة فى العلـوم التجاريـة. كمـا يهـدف المقـرر الى تعريـف الطالـب بـالأنواع المختلفـة للـدوال الرياضية والطرق المختلفة لحل المعادلات الخطية بإستخدام المصفوفات والمحـددات. كـذلك تعريـف الطالـب بأسـاليب البرمجـة الخطيـة ومـن ثـم يـتمكن الطالـب مـن بنـاء النمـاذج الرياضـية التـى تفيـد فى حـل المشـكلات الأساسـية للتفاضـل وطـرق تعظـيم وتدنيـة الـدوال الرياضـية والمبـادئ الأساسية للتكامل غير المحدود وغير المحدود مع بيان أهميتها العلمية فى مجال الاعمال والاقتصاد. ويعتبر هذا المقرر الأساس الرياضى للعديد من المقـررات الدراسـية التـى سـيقوم الطالـب بدراسـتها فيمـا بعـد مثـل مقـرر الاحصاء، بحوث العمليات، الاقتصاد، التمويل، المحاسبة وغيرها.

فهرس الكتاب

الفصل الأول

الدوال

Functions

أولاً: تعريف الدالة

تعرف الدالة بأنها عبارة عن علاقة بين متغيرين أحدهما متغير تابع ويرمز له بـالرمز (ص) والاخـر متغيـر مسـتقل ويرمـز لـه بـالرمز (س) حيـث يعتمـد المتغيـر التـابع على المتغيـر المسـتقل ويتـأثر بـه. فعلى سـبيل المثـال كلمـا زادت الدعايـة لمنـتج مـا (س) كلمـا زادت قيمـة المبيعـات (ص) مـن نفـس المنتج والعكس صحيح. والدالة تكتب رياضياً بالصيغة التالية:

$$\boxed{\text{ص} = \text{د} \left(\text{س} \right)}$$

وتسمى هذه العلاقة بالعلاقة الدالية البسيطة حيث أن المتغير التابع (ص) يعتمد ويتأثر بمتغير مستقل واحد (س).

ثانياً: أنواع الدوال

(١): الدالة الخطية أو علاقة الخط المستقيم

تأخذ الدالة الخطية أو علاقة الخط المستقيم الشكل التالى:

$$\boxed{\text{ص} = \text{أ} + \text{ب}\ \text{س}}$$

<u>حيث أن:</u>

ص : المتغير التابع

س : المتغير المستقل

أ : الجزء المقطوع من المحور الصادي عندما س = صفر أو بمعنى أخر قيمة المتغير التابع (ص) عندما يكون المتغير المستقل (س) يساوى صفر .

ب : ميل الخط المستقيم على المحور الأفقي، وهو عبارة مقدار التغير في المتغير التابع (ص) نتيجة حدوث تغير في المتغير المستقل (س) بمقدار وحدة واحدة.

تمرين (١):

أوجد الميل والجزء المقطوع من المحور الصادي للدالة الخطية الآتية:

ص = ٥ + ٦ س

الحل

ص = ٥ + ٦ س

حيث أن علاقة الخط المستقيم تأخذ الشكل الآتي:

ص = أ + ب س

أ = الجزء المقطوع من المحور الصادي = ٥

ب = ميل الخط المستقيم= ٦

تمرين (٢):

أوجد الميل والجزء المقطوع من المحور الصادي للدالة الخطية الآتية:

– ٤ س + ٢ ص = ٨

الحل

لإيجاد الميل والجزء المقطوع من المحور الصادي يلزم وضع المعادلة المعطاة في التمرين على الصورة الآتية:

ص = أ + ب س

أي يلزم وضع (ص) في الطرف الأيمن من المعادلة ووضع (س) والمقدار الثابت في الطرف الأيسر من المعادلة.

∴ ٢ ص = ٨ + ٤ س

<u>بقسمة الطرفين على ٢</u>

$$\frac{\text{٢ ص}}{\text{٢}} = \frac{\text{٨}}{\text{٢}} + \frac{\text{٤ س}}{\text{٢}}$$

∴ ص = ٤ + ٢ س

أ = الجزء المقطوع من المحور الصادي = ٤

ب = ميل الخط المستقيم= ٢

تمرين (**٣**):

أوجد الميل والجزء المقطوع من المحور الصادي للدالة الخطية الآتية:

٩ + ٣ ص = ٦ س

الحل

لإيجاد الميل والجزء المقطوع من المحور الصادي يلزم وضع المعادلة المعطاة في التمرين على الصورة الآتية:

ص = أ + ب س

أي يلزم وضع (ص) في الطرف الأيمن من المعادلة ووضع (س) والمقدار الثابت في الطرف الأيسر من المعادلة.

∴ ٣ ص = ٦ س – ٩

بقسمة الطرفين على ٣

$$\frac{٣\ ص}{٣} = \frac{٦\ س}{٣} - \frac{٩}{٣}$$

∴ ص = ٢ س – ٣

أ = الجزء المقطوع من المحور الصادي = – ٣

ب = ميل الخط المستقيم= ٢

تمرين (٤):

أوجد الميل والجزء المقطوع من المحور الصادي للدالة الخطية الآتية:

٦ س – ٣ ص – ١٢ = صفر

الحل

٦ س – ٣ ص – ١٢ = صفر

∴ – ٣ ص = ١٢ – ٦ س

بقسمة الطرفين على – ٣

∴ ص = – ٤ + ٢ س

أ = الجزء المقطوع من المحور الصادي = – ٤

ب = ميل الخط المستقيم= ٢

تمرين (٥):

اوجد علاقة الخط المستقيم الذي ميله يساوى ٩ ويقطع المحور الصادي في ٣

الحل

ميل الخط المستقيم (ب) = ٩

الجزء المقطوع من المحور الصادي (أ) = ٣

علاقة الخط المستقيم هي:

ص = أ + ب س

ص = ٣ + ٩ س

تمرين (٦):

اوجـد علاقـة الخـط المسـتقيم الـذي ميلـه يسـاوى – ٥ ويقطـع المحـور الصادي في ٦

الحل

علاقة الخط المستقيم هي:

ص = أ + ب س

ص = ٦ – ٥ س

تمرين (٧):

اوجد علاقة الخط المستقيم الذي ميله يساوى ٤ ويقطع المحور الصادي في نقطة الأصل

الحل

علاقة الخط المستقيم هي:

ص = أ + ب س

ص = صفر + ٤ س

ص = ٤ س

تمرين (٨):

اوجد علاقة الخط المستقيم الذي ميله يساوى صفر ويقطع المحور الصادي في ٩

الحل

علاقة الخط المستقيم هي:

ص = أ + ب س

ص = ٩ + صفر × س

ص = ٩

استنتاج ميل الخط المستقيم بمعلومية نقطتين عليه ($س_١$، $ص_١$) و ($س_٢$ ، $ص_٢$)

علاقة الخط المستقيم تأخذ الشكل الآتي :

ص = أ + ب س

بالتعويض في علاقة الخط المستقيم بالنقطة الأولى ($س_١$ ، $ص_١$)

$ص_١$ = أ + ب $س_١$ (١)

بالتعويض في علاقة الخط المستقيم بالنقطة الثانية ($س_٢$ ، $ص_٢$)

$ص_٢$ = أ + ب $س_٢$ (٢)

بطرح المعادلة (١) من المعادلة (٢)

$$ص_١ = \cancel{أ} + ب\ س_١ \qquad (٣)$$

$$ص_٢ = \cancel{أ} + ب\ س_٢ \qquad (٤)$$

$$ص_٢ - ص_١ = ب\ س_٢ - ب\ س_١$$

بأخذ ب عامل مشترك من الطرف الأيسر:

$$ص_٢ - ص_١ = ب\ (س_٢ - س_١)$$

يمكن استنتاج الميل (ب) بالقانون التالى:

$$ب = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$$

تمرين (٩):

أوجد ميل الخط المستقيم الذى يمر بالنقطتين:

(٢ ، ٤) ، (٤ ، ١٠)

الحل

$$\underset{(س_١ ،\ ص_١)}{(٢ ،\ ٤)} \quad ، \quad \underset{(س_٢ ،\ ص_٢)}{(٤ ،\ ١٠)}$$

<u>إيجاد ميل الخط المستقيم (ب):</u>

$$ب = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{١٠ - ٤}{٤ - ٢} = ٣$$

وهذا يعنى أنه عندما يتغير المتغير المستقل (س) بمقدار وحدة واحدة يتغير المتغير التابع (ص) قد تغير بمقدار ٣ وحدات.

تمرين (١٠):

أوجد ميل الخط المستقيم الذى يمر بنقطة الأصـــل والنقطة (٢ ، ٤)

الحل

(صفر ، صفر) ، (٢ ، ٤)

(س١ ، ص١) ، (س٢ ، ص٢)

إيجاد ميل الخط المستقيم (ب):

$$ب = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{٤ - صفر}{٢ - صفر} = \frac{٤}{٢} = ٢$$

تمرين (١١):

أوجد ميل الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة (٣ ، ٥) والنقطة (٦ ، ٨)

الحل

(٣ ، ٥) ، (٦ ، ٨)

(س١ ، ص١) ، (س٢ ، ص٢)

إيجاد ميل الخط المستقيم (ب):

$$ب = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{٨ - ٥}{٦ - ٣} = \frac{٣}{٣} = ١$$

استنتاج علاقة الخط المستقيم بمعلومية نقطتين عليه ($س_1$، $ص_1$) و ($س_2$ ، $ص_2$)

إذا كـان معلومـا لـدينا أي نقطتـين علـى الخـط المسـتقيم: النقطـة الأولـى ($س_1$ ، $ص_1$) والنقطـة الثانيـة ($س_2$ ، $ص_2$) فإنـه يـتم إيجـاد علاقـة الخـط المستقيم بإتباع الخطوات الأتية .

(١) يتم استنتاج الميل (ب) بالقانون التالى:

$$ب = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$$

(٢) يتم إيجاد علاقة الخط المستقيم بالقانون التالى:

$$ص - ص_1 = ب\ (س - س_1)$$

تمرين (١٢):

أوجد علاقة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطتين

(١ ، ٤) ، (٢ ، ٦)

الحل

$$\underset{(س_1\ ،\ ص_1)}{(١\ ،\ ٤)}\ ،\ \underset{(س_2\ ،\ ص_2)}{(٢\ ،\ ٦)}$$

(١) إيجاد ميل الخط المستقيم (ب):

$$ب = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{٦ - ٤}{٢ - ١} = ٢$$

(٢) يتم إيجاد علاقة الخط المستقيم بالقانون التالى:

$$\text{ص} - \text{ص}_{\text{١}} = \text{ب} \left(\text{س} - \text{س}_{\text{١}} \right)$$

$$\text{ص} - \text{٤} = \text{٢} \left(\text{س} - \text{١} \right)$$

$$\text{ص} - \text{٤} = \text{٢ س} - \text{٢}$$

$$\text{ص} = \text{٢ س} - \text{٢} + \text{٤}$$

$$\text{ص} = \text{٢ س} + \text{٢}$$

ميل الخط المستقيم (ب) = ٢

الجزء المقطوع من المحور الصادي (أ) = ٢

تمرين (**١٣**)**:** أوجد علاقة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطتين:

(− ٣ ، − ٤) ، (− ٦ ، ٥)

الحل

$$\left(-\text{٣} \,،\, -\text{٤} \right) \,،\, \left(-\text{٦} \,،\, \text{٥} \right)$$

$$\left(\text{س}_{\text{١}} \,،\, \text{ص}_{\text{١}} \right) \,،\, \left(\text{س}_{\text{٢}} \,،\, \text{ص}_{\text{٢}} \right)$$

(١) إيجاد ميل الخط المستقيم (ب):

$$\text{ب} = \frac{\text{ص}_{\text{٢}} - \text{ص}_{\text{١}}}{\text{س}_{\text{٢}} - \text{س}_{\text{١}}} = \frac{\text{٥} - (-\text{٤})}{-\text{٦} - (-\text{٣})} = \frac{\text{٩}}{-\text{٣}} = -\text{٣}$$

(٢) يتم إيجاد علاقة الخط المستقيم بالقانون التالى:

$$\text{ص} - \text{٤} = -\text{٣} \left(\text{س} - (-\text{٣}) \right)$$

$$\text{ص} - \text{٤} = -\text{٣} \left(\text{س} + \text{٣} \right)$$

$$ص - ٤ = - ٣ س - ٩$$

$$ص = - ٣ س - ٩ + ٤$$

$$ص = - ٣ س - ٥$$

ميل الخط المستقيم (ب) = – ٣

الجزء المقطوع من المحور الصادي (أ) = – ٥

تمرين (١٤):

أوجد ميل الخط المستقيم الذى يمر بنقطة الأصل والنقطة (٢ ، ٤)

الحل

$$(\text{صفر} \text{ ، } \text{صفر}) \text{ ، } (٢ \text{ ، } ٤)$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$(س_١ \text{ ، } ص_١) \text{ ، } (س_٢ \text{ ، } ص_٢)$$

(١) إيجاد ميل الخط المستقيم (ب):

$$ب = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٤ - \text{صفر}}{٢ - \text{صفر}} = \frac{٤}{٢} = ٢$$

(٢) يتم إيجاد علاقة الخط المستقيم بالقانون التالى:

$$ص - ص_١ = ب (س - س_١)$$

$$ص - ٤ = ٢ (س - ٢)$$

$$ص - ٤ = ٢ س - ٤$$

$$ص = ٢ س - ٤ + ٤$$

$$ص = ٢ س$$

ميل الخط المستقيم (ب) = ٢

الجزء المقطوع من المحور الصادي (أ) = صفر

تمرين (**١٥**):

اوجد علاقة الخط المستقيم الذي يمر بالنقطة (٢ ، ٤) وميله يساوى ٦

الحل

يتم إيجاد علاقة الخط المستقيم بالقانون التالى:

ص – ص١ = ب (س – س١)

ص – ٤ = ٦ (س – ٢)

ص – ٤ = ٦ س – ١٢

ص = ٦ س – ١٢ + ٤

ص = ٦ س – ٨

ميل الخط المستقيم (ب) = ٦

الجزء المقطوع من المحور الصادي (أ) = – ٨

التطبيقات التجارية للدالة الخطية:

تستخدم الدالة الخطية فى العديد من التطبيقات التجارية المختلفة نذكر منها ما يلى:

(١) **استخدام الدالة الخطية في تقدير التكلفة**:

إن النموذج الخطى للتكلفة يأخذ الشكل الآتي :

التكلفة الكلية = التكلفة الثابتة + التكلفة المتغيرة للوحدة × عدد الوحدات

ويمكن التعبير عنها فى الصورة التالية:

$$\boxed{ص = أ + ب\ س}$$

حيث أن:

ص : التكلفة الكلية

س : عدد الوحدات المنتجة

أ : التكلفة الثابتة وهي التكلفة التي تتحملها المنشأة حتى ولو لم يتم إنتاج أي وحدة مثل تكلفة الإيجار.

ب : التكلفة المتغيرة للوحدة وهي التكلفة التي تتغير وتتأثر بتغير حجم الإنتاج مثل تكلفة المواد الخام.

تمرين (**١٦**):

ينتج أحد المصانع نوع معين من الكراسى الخشبية، فإذا علمت أن التكلفة الكلية لإنتاج ١٠ كراسى في اليوم هي ٤٠٠٠ جنيه بينما التكلفة الكلية لإنتاج ٢٠ كرسى في اليوم هي ٧٠٠٠ جنيه. فباستخدام النموذج الخطى للتكلفة أوجد كل من: التكلفة الثابتة والتكلفة المتغيرة للوحدة ثم أوجد التكلفة الكلية لإنتاج ٣٠ كرسى في اليوم.

الحل

يمكن تلخيص بيانات التمرين في الجدول الآتي :

عدد الكراسى المنتجة (س)	التكلفة الكلية للإنتاج (ص)
١٠ ⇦ ($س_1$)	٤٠٠٠ جنيه ⇦ ($ص_1$)
٢٠ ⇦ ($س_2$)	٧٠٠٠ جنيه ⇦ ($ص_2$)

<u>إيجاد التكلفة المتغيرة للوحدة (ب):</u>

$$ب = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٧٠٠٠ - ٤٠٠٠}{٢٠ - ١٠} = \frac{٣٠٠٠}{١٠} = ٣٠٠$$

<u>يتم إيجاد علاقة الخط المستقيم بالقانون التالى:</u>

$$ص - ص_١ = ب\ (س - س_١)$$

ص – ٤٠٠٠ = ٣٠٠ (س – ١٠)

ص – ٤٠٠٠ = ٣٠٠ س – ٣٠٠٠

ص = ٣٠٠ س – ٣٠٠٠ + ٤٠٠٠

ص = ٣٠٠ س + ١٠٠٠

التكلفة المتغيرة للوحدة (ب) = ٣٠٠ التكلفة الثابتة (أ) = ١٠٠٠

<u>إيجاد التكلفة الكلية لإنتاج ٣٠ كرسى في اليوم:</u>

ويتم ذلك عن طريق التعويض عن س = ٣٠ في النموذج الخطى للتكلفة كالآتي:

ص = ٣٠٠ س + ١٠٠٠

ص = ٣٠٠ × (٣٠) + ١٠٠٠

ص = ٩٠٠٠ + ١٠٠٠ = ١٠٠٠٠ جنيه

تمرين (١٧): ينتج أحد المصانع نوع معين من ساعات الحائط، فإذا علمت أن التكلفة الكلية لإنتاج ٥ ساعات في اليوم هي ٢٠٠٠ جنيه بينما التكلفة الكلية لإنتاج ١٠ ساعات في اليوم هي ٣٦٠٠ جنيه. فباستخدام النموذج الخطى للتكلفة أوجد كل من: التكلفة الثابتة والتكلفة المتغيرة للوحدة ثم أوجد التكلفة الكلية لإنتاج ٢٠ ساعة حائط في اليوم.

الحل

يمكن تلخيص بيانات التمرين في الجدول الآتي :

عدد الساعات المنتجة (س)	التكلفة الكلية للإنتاج (ص)
٥ ⇦ ($س_1$)	٢٠٠٠ جنيه ⇦ ($ص_1$)
١٠ ⇦ ($س_2$)	٣٦٠٠ جنيه ⇦ ($ص_2$)

<u>إيجاد التكلفة المتغيرة للوحدة (ب):</u>

$$ب = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{٣٦٠٠ - ٢٠٠٠}{١٠ - ٥} = \frac{١٦٠٠}{٥} = ٣٢٠$$

<u>يتم إيجاد علاقة الخط المستقيم بالقانون التالى:</u>

$$ص - ص_1 = ب (س - س_1)$$

$$ص - ٢٠٠٠ = ٣٢٠ (س - ٥)$$

$$ص - ٢٠٠٠ = ٣٢٠ س - ١٦٠٠$$

$$ص = ٣٢٠ س - ١٦٠٠ + ٢٠٠٠$$

$$ص = ٣٢٠ س + ٤٠٠$$

التكلفة المتغيرة للوحدة (ب) = ٣٢٠ التكلفة الثابتة (أ) = ٤٠٠

إيجاد التكلفة الكلية لإنتاج ٢٠ ساعة حائط في اليوم:

ويتم ذلك عن طريق التعويض عن س = ٢٠ في النموذج الخطى للتكلفة كالآتي:

ص = ٣٢٠ س + ٤٠٠

ص = ٣٢٠ × (٢٠) + ٤٠٠

ص = ٦٤٠٠ + ٤٠٠ = ٦٨٠٠ جنيه

(٢) استخدام الدالة الخطية في تحديد سعر وكمية التوازن في سوق المنافسة الكاملة

عندما تتساوى الكمية المطلوبة من سلعة ما مع الكمية المعروضة من نفس السلعة يتحقق التوازن في سوق المنافسة الكاملة ومن ثم يسمى السعر فى هذه الحالة بسعر التوازن والكمية بكمية التوازن.

تمرين (١٨): إذا كانت الكمية المطلوبة من سلعة ما تتحدد بالمعادلة الآتية:

ص = ٢٠ س + ٤٠

بينما كانت الكمية المعروضة لهذه السلعة تتحدد بالمعادلة الآتية:

ص = ١٠ س + ٦٠

حيث أن:

ص : الكمية المطلوبة والكمية المعروضة

س : السعر

المطلوب تحديد سعر وكمية التوازن لهذه السلعة في سوق المنافسة الكاملة.

الحل

إيجاد سعر التوازن

يتحقق التوازن في سوق المنافسة الكاملة عندما تتساوى الكمية المطلوبة مع الكمية المعروضة أي أن :

الكمية المطلوبة = الكمية المعروضة

٢٠ س + ٤٠ = ١٠ س + ٦٠

٢٠ س – ١٠ س = ٦٠ – ٤٠

١٠ س = ٢٠

س = ٢

∴ سعر التوازن لهذه السلعة = ٢ ج

إيجاد كمية التوازن

بالتعويض عن س = ٢ في أى معادلة سواء كانت معادلة الكمية المطلوبة أو الكمية المعروضة :

بالتعويض فى معادلة الكمية المطلوبة

ص = ٢٠ س + ٤٠

ص = ٢٠ × ٢ + ٤٠

ص = ٤٠ + ٤٠ = ٨٠ وحدة

بالتعويض فى معادلة الكمية المعروضة

ص = ١٠ س + ٦٠

ص = ١٠ × ٢ + ٦٠

ص = ٢٠ + ٦٠ = ٨٠ وحدة

تمرين (١٩): إذا كانت الكمية المطلوبة من سلعة ما تتحدد بالمعادلة الآتية:

ص = ٢ س + ٥٠

بينما كانت الكمية المعروضة لهذه السلعة تتحدد بالمعادلة الآتية:

ص = – ٨ س + ١٠٠

حيث أن:

ص : الكمية المطلوبة والكمية المعروضة

س : السعر

المطلوب تحديد سعر وكمية التوازن لهذه السلعة في سوق المنافسة الكاملة.

الحل

إيجاد سعر التوازن

يتحقق التوازن في سوق المنافسة الكاملة عندما تتساوى الكمية المطلوبة مع الكمية المعروضة أي أن :

الكمية المطلوبة	=	**الكمية المعروضة**
٢ س + ٥٠	=	– ٨ س + ١٠٠
٢ س + ٨ س	=	١٠٠ – ٥٠
١٠ س	=	٥٠
س	=	٥

سعر التوازن لهذه السلعة = ٥ ج

إيجاد كمية التوازن

بالتعويض عن س = ٥ في أى معادلة سواء كانت معادلة الكمية المطلوبة أو الكمية المعروضة :

ص = ٢ س + ٥٠

ص = ٢ × ٥ + ٥٠

ص = ١٠ + ٥٠ = ٦٠ وحدة

(٢): الدوال غير الخطية

تتعدد أشكال الدوال غير الخطية وسوف نقتصر في هذا الجزء على شرح المعادلة من الدرجة الثانية فقط، وتأخذ المعادلة من الدرجة الثانية الشكل الاتي:

$$\boxed{\text{أ س}^{٢} + \text{ب س} + \text{جـ} = \text{صفر}}$$

يتم حل المعادلة من الدرجة الثانية بعدة طرق نستخدم منها طريقة القانون

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤ \times \text{أ} \times \text{جـ}}}{٢ \times \text{أ}}$$

حيث أن :

أ : معامل س^{٢} ب : معامل س جـ : المقدار الثابت

تمرين (٢٠): حل المعادلة الآتية باستخدام القانون:

س^{٢} – ٣ س + ٢ = صفر

الحل

أ : معامل $\text{س}^{٢}$ = ١ ب : معامل س = – ٣ جـ : المقدار الثابت = ٢

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤ \times \text{أ} \times \text{جـ}}}{٢ \times \text{أ}}$$

$$\text{س} = \frac{-(-٣) \pm \sqrt{(-٣)^{٢} - ٤ \times ١ \times ٢}}{٢ \times ١}$$

$$\text{س} = \frac{٣ \pm \sqrt{١}}{٢} = \frac{٣ \pm ١}{٢}$$

$$\text{س} = \frac{٣ + ١}{٢} = \frac{٤}{٢} = ٢ \qquad \Big| \qquad \text{س} = \frac{٣ - ١}{٢} = \frac{٢}{٢} = ١$$

للتأكد من الحل يتم التعويض بكل قيمة فى معادلة الدرجة الثانية

$$\text{س}^{٢} - ٣\,\text{س} + ٢ = \text{صفر}$$

التعويض بـ س = ٢

$(٢)^{٢} - ٣ \times ٢ + ٢ = \text{صفر}$

$٤ - ٦ + ٢ = \text{صفر}$

$-٢ + ٢ = \text{صفر}$

التعويض بـ س = ١

$(١)^{٢} - ٣ \times ١ + ٢ = \text{صفر}$

$١ - ٣ + ٢ = \text{صفر}$

$-٢ + ٢ = \text{صفر}$

تمرين (**٢١**): حل المعادلة الآتية باستخدام القانون:

$$س^{٢} - ٩\ س = - ٢٠$$

الحل

<u>يتم ترتيب المعادلة أولاً</u>

$$س^{٢} - ٩\ س + ٢٠ = صفر$$

أ : معامل $س^{٢}$ = ١ ب : معامل س = – ٩ جـ : المقدار الثابت = ٢٠

$$س = \frac{- ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ \times أ \times جـ}}{٢ \times أ}$$

$$س = \frac{-(-٩) \pm \sqrt{(-٩)^{٢} - ٤ \times ١ \times ٢٠}}{٢ \times ١}$$

$$س = \frac{٩ \pm \sqrt{١}}{٢} = \frac{٩ \pm ١}{٢}$$

$$س = \frac{٩ + ١}{٢} = \frac{١٠}{٢} = ٥ \qquad | \qquad س = \frac{٩ - ١}{٢} = \frac{٨}{٢} = ٤$$

للتأكد من الحل يتم التعويض بكل قيمة فى معادلة الدرجة الثانية

$$س^{٢} - ٩\ س + ٢٠ = صفر$$

التعويض بـ س = ٥

(٥)^{٢} – ٩ × (٥) + ٢٠ = صفر

٢٥ – ٤٥ + ٢٠ = صفر

– ٢٠ + ٢٠ = صفر

التعويض بـ س = ٤

(٤)^{٢} – ٩ × (٤) + ٢٠ = صفر

١٦ – ٣٦ + ٢٠ = صفر

– ٢٠ + ٢٠ = صفر

تمرين (**٢٢**): حل المعادلة الآتية باستخدام القانون:

س^{٢} – ٧ س = – ١٠

الحل

<u>يتم ترتيب المعادلة أولاً</u>

س^{٢} – ٧ س + ١٠ = صفر

أ : معامل س^{٢}= ١ ب : معامل س = – ٧ جـ : المقدار الثابت = ١٠

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{\text{٢}} - \text{٤} \times \text{أ} \times \text{جـ}}}{\text{٢} \times \text{أ}}$$

$$\text{س} = \frac{-(-\text{٧}) \pm \sqrt{(-\text{٧})^{\text{٢}} - \text{٤} \times \text{١} \times \text{١٠}}}{\text{٢} \times \text{١}}$$

$$\text{س} = \frac{\text{٧} \pm \sqrt{\text{٩}}}{\text{٢}} = \frac{\text{٧} \pm \text{٣}}{\text{٢}}$$

$$\text{س} = \frac{\text{٧} + \text{٣}}{\text{٢}} = \frac{\text{١٠}}{\text{٢}} = \text{٥}$$

$$\text{س} = \frac{\text{٧} - \text{٣}}{\text{٢}} = \frac{\text{٤}}{\text{٢}} = \text{٢}$$

<u>للتأكد من الحل يتم التعويض بكل قيمة فى معادلة الدرجة الثانية</u>

س^{٢} – ٧ س + ١٠ = صفر

التعويض بـ س = ٥

(٥)^{٢} – ٧ × (٥) + ١٠ = صفر

٢٥ – ٣٥ + ١٠ = صفر

– ٣٥ + ٣٥ = صفر

التعويض بـ س = ٢

(٢)^{٢} – ٧ × (٢) + ١٠ = صفر

٤ – ١٤ + ١٠ = صفر

– ١٤ + ١٤ = صفر

الفصل الثاني

المتباينات

Inequalities

أولا : تعريف المتباينة

تعرف المتباينة بأنها علاقة رياضية تستخدم للتعبير عن اختلاف قيمة عنصرين رياضيين باستخدام الرموز التالية :

(≥ ، ≤ ، > ، <)

ثانيا : قواعد المتباينات

١) إذا جمع أو طرح رقم حقيقي من كل طرف من طرفي المتباينة فإن المتباينة لا تتغير.

على سبيل المثال:

جمع مقدار للطرفين	طرح مقدار من الطرفين
٨ < ٢٠	٨ < ٢٠
باضافة القيمة ٦ للطرفين	بطرح القيمة ٦ من الطرفين
٦ + ٨ < ٦ + ٢٠	٦ – ٨ < ٦ – ٢٠
١٤ < ٢٦	٢ < ١٤

٢) إذا ضرب طرفي المتباينة في رقم موجب، أو إذا تم قسمة طرفي المتباينة على رقم موجب فإن علامة المتباينة لا تتغير.

على سبيل المثال:

ضرب الطرفين فى رقم موجب

١٠ > ٦

بضرب الطرفين فى القيمة ٢

١٠ × ٢ > ٦ × ٢

٢٠ > ١٢

قسمة الطرفين على رقم موجب

١٠ > ٦

بقسمه الطرفين على القيمة ٢

١٠ ÷ ٢ > ٦ ÷ ٢

٥ > ٣

٣) إذا ضرب طرفي المتباينة في رقم سالب، أو إذا تم قسمة طرفي المتباينة على رقم سالب فإن علامة المتباينة تتغير.

على سبيل المثال:

ضرب الطرفين فى رقم سالب

١٠ > ٦

بضرب الطرفين فى القيمة – ٢

١٠ × – ٢ < ٦ ×(– ٢)

– ٢٠ < – ١٢

قسمة الطرفين على رقم سالب

١٠ > ٦

بقسمه الطرفين على القيمة – ٢

١٠ ÷ – ٢ < ٦ ÷ (– ٢)

– ٥ < – ٣

٤) إذا كان طرفي المتباينة موجب أو سالب الإشارة، فإن علامة المتباينة تتغير عند استبدال البسط مقام واستبدال المقام بسط.

على سبيل المثال:

١/٢ > ١/٤

باستبدال البسط بالمقام

٢/١ < ٤/١

٢ < ٤

٥) إذا كان طرفي المتباينة موجب الإشارة، فإن رفع كل طرف من طرفي المتباينة لأس موجب فإن علامة المتباينة لا تتغير.

على سبيل المثال:

رفع كل طرف لاس موجب

(٤)^٢ > (٣)^٢

١٦ > ٩

ثالثاً: حل المتباينات الخطية في مجهول واحد

يقصد بحل المتباينة إيجاد مجموعة الأعداد الحقيقية التي تجعل المتباينة حقيقية صحيحة، وتعد المتباينة الخطية متباينة من الدرجة الأولى.

تمرين (١):

حل المتباينة الأتية ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد: -

٢ + ٤ س > ١٠

الحل

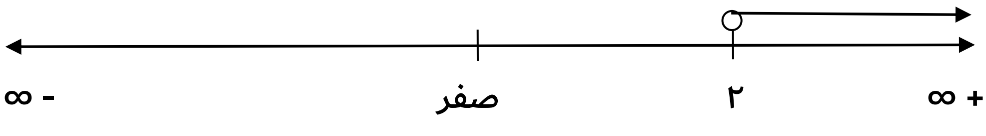
يتم ترتيب المتباينة بحيث يكون السينات فى الطرف الايمن والقيم الثابتة فى الطرف الأيسر:

٤ س > ١٠ – ٢

٤ س > ٨

بقسمة الطرفين على ٤

س > ٢



تمرين (٢):

حل المتباينة الأتية ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد: -

٣ س + ٢ ≤ ٨

الحل

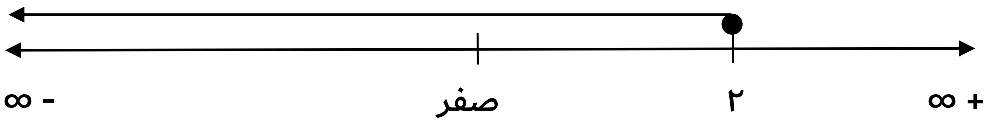
يتم ترتيب المتباينة بحيث يكون السينات فى الطرف الايمن والقيم الثابتة فى الطرف الأيسر:

٣ س ≤ ٨ – ٢

٣ س ≤ ٦

بقسمة الطرفين على ٣

س ≤ ٢



تمرين (٣):

حل المتباينة الأتية ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد: -

(٣ س + ٥) / ٢ > ٧

الحل

يتم ضرب طرفي المتباينة × ٢

~~٢~~ × (٣ س + ٥) / ~~٢~~ > ٧ × ٢

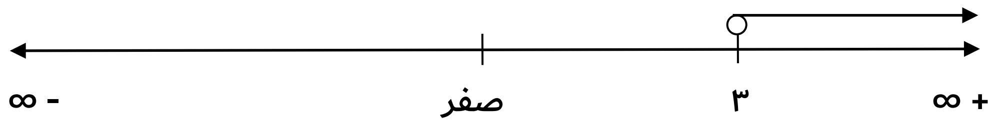
٣ س + ٥ > ١٤

٣ س > ١٤ – ٥

٣ س > ٩

بقسمة الطرفين على ٣

س > ٣



تمرين (٥):

حل المتباينة الأتية ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد: -

٨ س + ٢ > ٢ س + ١٤

الحل

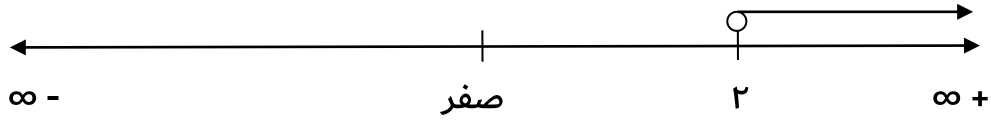
يتم ترتيب المتباينة بحيث يكون السينات فى الطرف الايمن والقيم الثابتة فى الطرف الأيسر:

٨ س – ٢ س > ١٤ – ٢

٦ س > ١٢

بقسمة الطرفين على ٦

س > ٢



تمرين (٦):

حل المتباينة الأتية ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد: -

٢ (٣ س – ٢) ≤ ٤ – (س – ٦)

الحل

٢ (٣ س – ٢) ≤ ٤ – (س – ٦)

يتم فك الأقواس أولاً

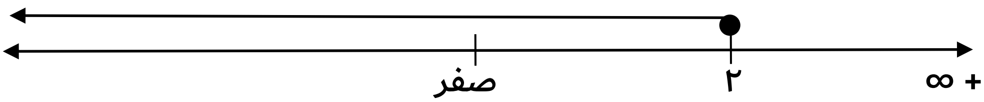
٦ س – ٤ ≤ ٤ – س + ٦

٦ س + س ≤ ٤ + ٦ + ٤

٧ س ≤ ١٤

بقسمة الطرفين على ٧

س ≤ ٢



تمرين (٧):

حل المتباينة الأتية ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد: -

١٢ < – ٦س + ٢٤ < ٤٨

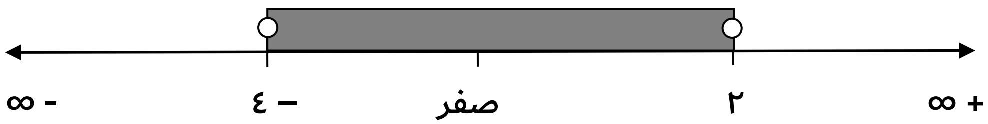
الحل

يتم قسمة المتباينة الى قسمين

١٢ < – ٦س + ٢٤	– ٦س + ٢٤ < ٤٨
يتم ترتيب المتباينة	يتم ترتيب المتباينة
٦س < ٢٤ – ١٢	– ٦س < ٤٨ – ٢٤
٦س < ١٢	– ٦س < ٢٤
يتم القسمة على ٦	يتم القسمة على – ٦ مع مراعاه تغيير العلامة
س < ٢	س > – ٤

يتم رسم الحلول وايجاد منطقة الحل ويلاحظ أن هناك منطقة حل مشتركة وهى

– ٤ < س < ٢



تمرين (٨):

حل المتباينة الأتية ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد: -

س – ٦ ≤ ٢ س – ٤ ≤ ٥ – س

الحل

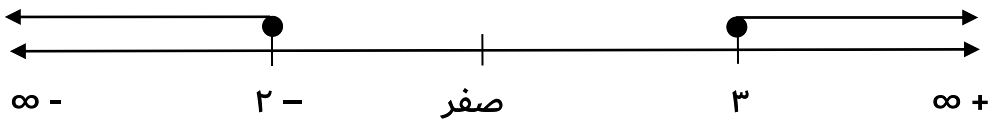
يتم قسمة المتباينة الى قسمين

س – ٦ ≤ ٢ س – ٤	٢ س – ٤ ≤ ٥ – س
يتم ترتيب المتباينة	يتم ترتيب المتباينة
س – ٢ س ≤ – ٤ + ٦	٢ س + س ≤ ٥ + ٤
– س ≤ ٢	٣ س ≤ ٩

يتم القسمة على – ١ مع تغيير العلامة	يتم القسمة على ٣
س ≥ – ٢	س ≤ ٣

يتم رسم الحلول وايجاد منطقة الحل ويلاحظ ان هناك منطقتى حل وهما

س ≥ – ٢ ، س ≤ ٣



خامساً: القيمة المطلقة:

تمرين (٨): حل المتباينة الأتية ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد: -

| س – ٢ | ≥ ٥

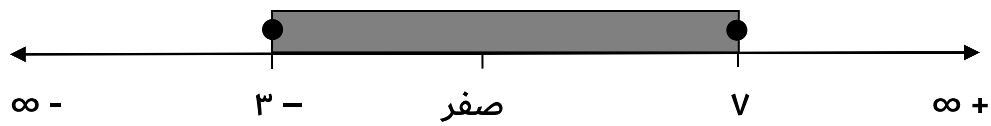
الحل

يتم قسمة المتباينة الى قسمين القسم الاول يتضمن علامة المتباينة كما هى بينما القسم الثانى يتم ضرب القيمة الثابتة فى اشارة سالبة مع تغيير العلامة

س – ٢ ≥ ٥	س – ٢ ≤ – ٥
س ≥ ٥ + ٢	س ≤ – ٥ + ٢
س ≥ ٧	س ≤ – ٣

يتم رسم الحلول وايجاد منطقة الحل ويلاحظ ان هناك منطقة مشتركة وهى

٧ ≥ س ≤ – ٣



تمرين (٩): حل المتباينة الأتية ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد: -

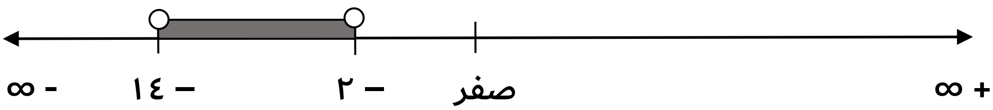
| س + ٨ | < ٦

الحل

يتم قسمة المتباينة الى قسمين القسم الاول يتضمن علامة المتباينة كما هى بينما القسم الثانى يتم ضرب القيمة الثابتة فى اشارة سالبة مع تغيير العلامة

س + ٨ < ٦	س + ٨ > − ٦
س < ٦ − ٨	س > − ٦ − ٨
س < − ٢	س > − ١٤

يتم رسم الحلول وايجاد منطقة الحل ويلاحظ ان هناك منطقة مشتركة وهى



استخدام المتباينات في التطبيقات التجارية

معادلة الربح

يتحقق صافي الربح عندما تكون الإيرادات الكلية أكبر من التكاليف الكلية كما يلى:

الإيراد الكلى > التكاليف الكلية

حيث إن:

١- التكاليف المتغيرة = التكلفة المتغيرة للوحدة × عدد الوحدات المباعة

٢- الإيراد الكلى = سعر بيع الوحدة × عدد الوحدات المباعة

٣- التكاليف الكلية = التكاليف الثابتة + التكاليف المتغيرة

تمرين (١٠):

إذا كان سعر بيع منتج معين يساوى ٢٠ جنيه، وبإفتراض أن التكلفة الثابتة للمصنع تساوى ١٥٠٠٠ جنيه في الشهر، والتكلفة المتغيرة لإنتاج وحدة من هذه السلعة تساوى ١٠ جنيهات فأوجد حجم الوحدات التي ينبغي أن تنتج وتباع في الشهر حتى يمكن تحقيق ربحا صافيا.

الحـل

سعر بيع الوحدة = ٢٠ جنيه

التكلفة الثابتة = ١٥٠٠٠ جنيه

التكلفة المتغيرة للوحدة = ١٠ جنيهات

١) التكاليف المتغيرة = التكلفة المتغيرة للوحدة × عدد الوحدات المباعة

= ١٠ × س

٢) التكاليف الكلية = التكاليف الثابتة + التكاليف المتغيرة

= ١٥٠٠٠ + ١٠ س

٣) الإيراد الكلى = سعر بيع الوحدة × عدد الوحدات المباعة

= ٢٠ × س

الإيراد الكلى > التكاليف الكلية

٢٠ س > ١٥٠٠٠ + ١٠ س

٢٠ س – ١٠ س > ١٥٠٠٠

١٠ س > ١٥٠٠٠

س > ١٥٠٠ وحدة

أى أن عدد الوحدات اللازم إنتاجها وبيعها (س) لتحقيق ربحا صافيا يجب أن يكون أكبر من ١٥٠٠ وحدة في الشهر.

ملاحظة هامة

اذا كان المطلوب تحديد عدد الوحدات التى يجب ان تحقق ربح على الأقل مساوى لقيمة معينة يتم تطبيق القاعدة التالية:

الإيراد الكلى – التكاليف الكلية ≥ قيمة الربح

تمرين (**١١**):

باقتراض أن معادلة التكاليف الكلية في الشهر لإنتاج (س) وحدة من سلعة ما هي (١٦٠٠٠ + ٨٠ س)، وأن سعر بيع الوحدة من هذه السلعة يساوى ١٠٠ جنيه، فأوجد حجم الوحدات (س) التي ينبغي أن تنتج وتباع في الشهر حتى يمكن تحقيق ربحا صافيا قدره ٥٠٠٠٠ جنيها على الأقل في الشهر.

الحل

التكاليف الكلية = ١٦٠٠٠ + ٨٠ س

سعر بيع الوحدة = ١٠٠ جنيه

الربح = ٥٠٠٠٠ جنيه

الإيراد الكلى = سعر بيع الوحدة × عدد الوحدات المباعة

= ١٠٠ × س

الإيراد الكلى – التكاليف الكلية ≥ قيمة الربح

١٠٠ س – (١٦٠٠٠ + ٨٠ س) ≥ ٥٠٠٠٠

١٠٠ س – ١٦٠٠٠ – ٨٠ س ≥ ٥٠٠٠٠

٢٠ س ≥ ٥٠٠٠٠ + ١٦٠٠٠

٢٠ س ≤ ٦٦٠٠٠

س ≤ ٣٣٠٠ وحدة

أى أن عـدد الوحـدات الـلازم إنتاجهـا وبيعهـا (س) لتحقيـق ربحـا صـافيا قـدره ٥٠٠٠٠ جنيها على الأقل في الشهر هو ٣٣٠٠

تمرين (١٢):

بافتراض أن التكلفة الثابتة فى انتاج أحد المصانع هى ٥٠٠٠ ، كما ان التكلفة المتغيرة للوحدة ٢ ج وأن سعر بيع الوحدة من هذه السلعة يساوى ١٢ جنيه، فأوجد حجم الوحدات (س) التـي ينبغـي أن تنتج وتباع في الشهر حتى يمكن تحقيق ربحا صافيا قدره ٨٠٠٠ جنيها على الأقل في الشهر.

الحـل

التكلفة الثابتة = ٥٠٠٠ ج

التكلفة المتغيرة للوحدة = ٢ ج

سعر بيع الوحدة = ١٢ جنيه

الربح = ٨٠٠٠ جنيه

التكلفة المتغيرة للوحدة = ٢ ج

١) التكاليف المتغيرة = التكلفة المتغيرة للوحدة × عدد الوحدات المباعة

= ٢ × س

٢) التكاليف الكلية = التكاليف الثابتة + التكاليف المتغيرة

= ٥٠٠٠ + ٢ س

٣) الإيراد الكلى = سعر بيع الوحدة × عدد الوحدات المباعة

= ١٢ × س

الإيراد الكلى – التكاليف الكلية ≥ قيمة الربح

١٢ س – (٥٠٠٠ + ٢ س) ≥ ٨٠٠٠

١٢ س – ٥٠٠٠ – ٢ س ≥ ٨٠٠٠

١٠ س ≥ ٨٠٠٠ + ٥٠٠٠

١٠ س ≥ ١٣٠٠٠

س ≥ ١٣٠٠ وحدة

أى أن عدد الوحدات اللازم إنتاجها وبيعها (س) لتحقيق ربحا صافيا قدره ٨٠٠٠ جنيها على الأقل في الشهر هو ١٣٠٠

الفصل الثالث

البرمجة الخطية

Linear Programming

أولا : البرمجة الخطية

البرمجة الخطية هي طريقة تستخدم في إيجاد القيمة العظمى أو الصغرى لبعض العلاقات الخطية تحت قيود معيَنة. وتسمى الدالة الخطية التى نريد أن نوجد لها النهايات العظمى أو الصغرى بدالة الهدف Objective Function بينما الحل الذى يعطى أكبر قيمة (إذا كان الهدف هو تعظيم الإيراد أو الربح) أو أقل قيمة (إذا كان الهدف هو تخفيض التكلفة) لدالة الهدف بالحل الامثل Optimal Solution، ويتكون النموذج الخطى للبرمجة الخطية كما يلى:

(١) دالة الهدف

دالة الهدف هى الدالة الخطية التى نريد أن نوجد لها النهايات العظمى أو الصغرى بدالة الهدف وتأخذ الشكل التالى:

دالة الهدف = أ × س + ب × ص

حيث أن:

فى حالة تعظيم الربح او تعظيم الايراد فان:

أ : تمثل سعر بيع الوحدة من المنتج الأول

ب : تمثل سعر بيع الوحدة من المنتج الثانى

فى حالة تخفيض التكلفة فان:

أ : تمثل التكلفة المتغيرة للوحدة للمنتج الأول

ب : تمثل التكلفة المتغيرة للوحدة للمنتج الثانى

(٢) القيود أو الشروط

حيث يتم التعبير عن القيود التى تواجه العملية الانتاجية فى شكل متباينات ويراعى ان تكون الثوابت فى الطرف الايسر لكل متباينة.

ويجب ملاحظة ان عدد الوحدات المنتجة التى يجب انتاجها من كل منتج يجب ان تكون موجبة ويقصد بهذه القيود بقيود عدم السلبية.

تمرين(١): تعظيم الربح

مصنع ينتج منتجين (كراسى ، مكاتب) وكان بالمصنع قسمين انتاجيين قسم تقطيع الخشب بطاقة اسبوعية ٢٦ ساعة ، قسم تجميع الخشب بطاقة اسبوعية ٣٠ ساعة ، ويحتاج الكرسى الواحد الى ٢ ساعة من القسم الاول و ٥ ساعات من القسم الثانى وربح الكرسى ٤٠ جنية كما يحتاج المكتب الى ٤ ساعات من القسم الاول و ٣ ساعات من القسم الثانى وربح الوحدة ٦٠ جنية.

المطلوب استخدام الحل البيانى للبرمجة الخطية فى ايجاد عدد الوحدات من كل منتج الذى يجعل الربح اكبر ما يمكن .

الحل

	الكراسى (س)	المكاتب (ص)	طاقة الاقسام
تقطيع الخشب	٢	٤	٢٦
تجميع الخشب	٥	٣	٣٠
الربح	٤٠	٦٠	تعظيم

أولاً: دالة الهدف

دالة الهدف = ٤٠ س + ٦٠ ص   تعظيم

ثانياً: القيود

٢ س + ٤ ص ≤ ٢٦

٥ س + ٣ ص ≤ ٣٠

ثالثا: العمليات الحسابية

القيد الاول أو المتباينة الاولى

٢ س + ٤ ص ≤ ٢٦

يتم افتراض أن قيمة س تساوى الصفر وايجاد قيمة ص والعكس

نفترض أن س = صفر	**نفترض أن ص = صفر**
٢ × صفر + ٤ ص = ٢٦	٢ س + ٤ × صفر = ٢٦
٤ ص = ٢٦	٢ س = ٢٦
ص = ٦,٥	س = ١٣

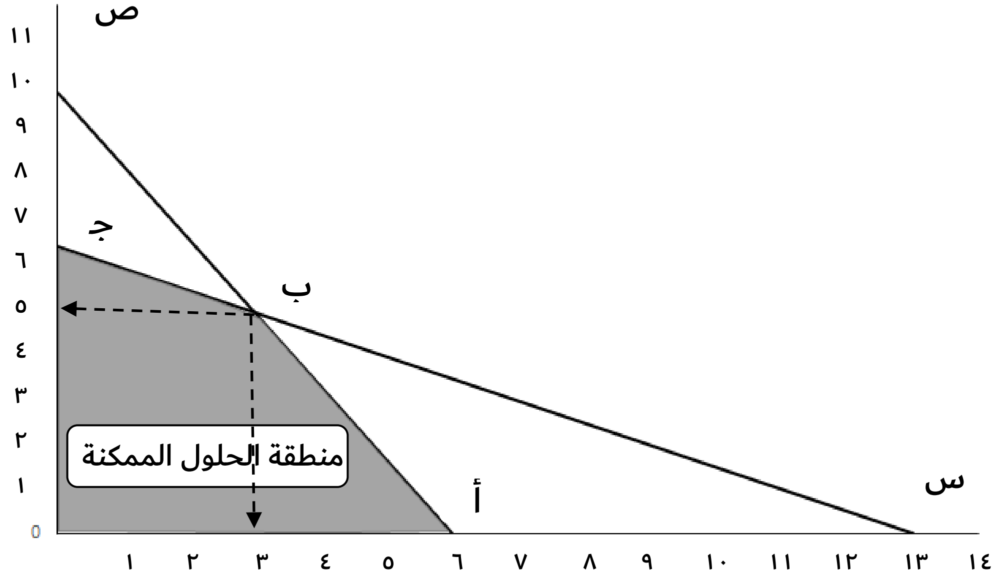
القيد الثانى أو المتباينة الثانية

٥ س + ٣ ص ≤ ٣٠

يتم افتراض أن قيمة س تساوى الصفر وايجاد قيمة ص والعكس

نفترض أن س = صفر	**نفترض أن ص = صفر**
٥ × صفر + ٣ ص = ٣٠	٥ س + ٣ × صفر = ٣٠
٣ ص = ٣٠	٥ س = ٣٠
ص = ١٠	س = ٦

رابعا: الرسم البيانى



يلاحظ ان منطقة الحل الممكنة هى المنطقة (أ ، ب ، جـ) وهى المنطقة الاقرب الى الصفر ولايجاد الحل الامثل يتم ايجاد احداثيات كل نقطة. ويتم ايجاد احداثيات النقطة ب بالاسقاط الرأسى على محور س والاسقاط الافقى على محور ص ثم نكون الجدول التالى:

نقاط الحل	س	ص	دالة الهدف = ٤٠ س + ٦٠ ص
أ	٦	صفر	٤٠ × (٦) + ٦٠ × (صفر) = ٢٤٠
ب	٣	٥	٤٠ × (٣) + ٦٠ × (٥) = ٤٢٠
جـ	صفر	٦,٥	٤٠ × (صفر) + ٦٠ × (٦,٥) = ٣٩٠

خامساً: الحل الامثل

وحيث ان دالة الهدف تعظيم الربح فان الحل الامثل يمثل الحل الذى يعطى أعلى قيمة لدالة الهدف بين الحلول الأساسية الممكنة وهو الحل الذى يتحقق عند النقطة (ب) وبالتالى ننصح المصنع بإنتاج ٣ كراسى وانتاج ٥ مكاتب لتحقيق أكبر ربح ممكن.

تمرين(٢): تخفيض التكلفة

مصنع ينتج نوعين مختلفين من شواحن الموبايلات ولديه طلبية من من النوع الاول ٢٢٤ وحدة وطلبية من النوع الثانى ٢٧٢ وحدة وكان لديه عاملان يقومون ببالتجميع، حيث يمكن للعامل الاول من تجمع ١٦ ، ٨ من كل نوع على الترتيب فى اليوم الواحد بينما يمكن للعامل الثانى تجميع ١٤ ، ٣٢ من كل نوع على الترتيب فى اليوم الواحد. وكان أجر العامل الاول ٣٥ جنية بينما اجر العامل الثانى ٤٠ جنية

المطلوب: أوجد عدد الأيام التى يعملها كل منهم حتى يحقق المصنع أقل تكلفة ممكنة.

الحل

	العامل الاول (س)	العامل الثانى (ص)	
النوع الاول	١٦	١٤	٢٢٤
النوع الثانى	٨	٣٤	٢٧٢
الأجر	٣٥	٤٠	تخفيض

أولاً: دالة الهدف

دالة الهدف = ٣٥ س + ٤٠ ص   تخفيض

ثانياً: القيود

١٦ س + ١٤ ص ≥ ٢٢٤

٨ س + ٣٤ ص ≥ ٢٧٢

ثالثا: العمليات الحسابية

القيد الاول أو المتباينة الاولى

١٦ س + ١٤ ص ≥ ٢٢٤

يتم افتراض أن قيمة س تساوى الصفر وايجاد قيمة ص والعكس

نفترض أن س = صفر

١٦ × صفر + ١٤ ص = ٢٢٤

١٤ ص = ٢٢٤

ص = ١٦

نفترض أن ص = صفر

١٦ س + ١٤ × صفر = ٢٢٤

١٦ س = ٢٢٤

س = ١٤

القيد الثانى أو المتباينة الثانية

٨ س + ٣٤ ص ≥ ٢٧٢

يتم افتراض أن قيمة س تساوى الصفر وايجاد قيمة ص والعكس

نفترض أن س = صفر

٨ × صفر + ٣٤ ص = ٢٧٢

٣٤ ص = ٢٧٢

ص = ٨

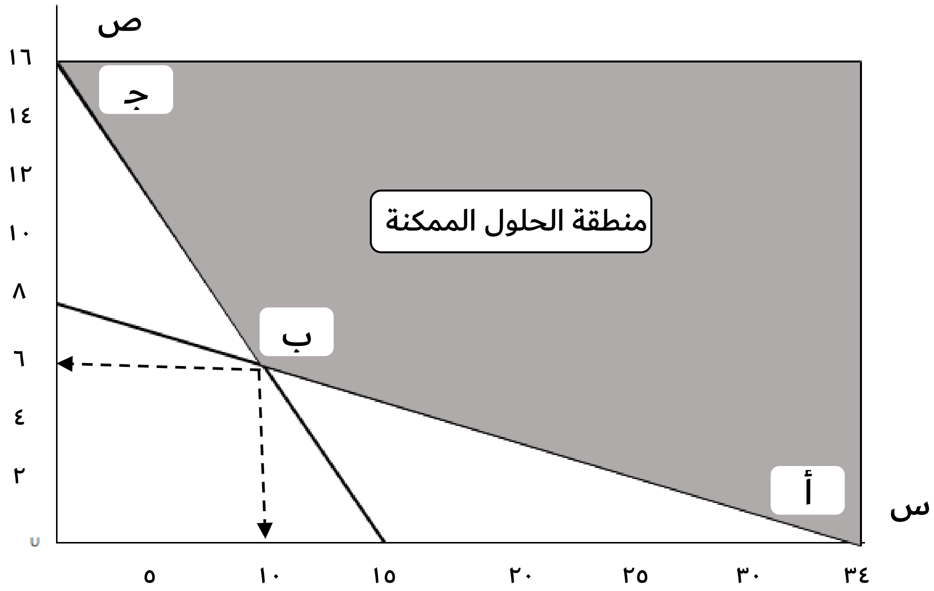
نفترض أن ص = صفر

٨ س + ٣٤ × صفر = ٢٧٢

٨ س = ٢٧٢

س = ٣٤

رابعا: الرسم البيانى



يلاحظ ان منطقة الحل الممكنة هى المنطقة (أ ، ب ، جـ) وهى المنطقة الابعد الى الصفر ولايجاد الحل الامثل يتم ايجاد احداثيات كل نقطة. ويتم ايجاد احداثيات النقطة ب بالاسقاط الرأسى على محور س والاسقاط الافقى على محور ص ثم نكون الجدول التالى:

نقاط الحل	س	ص	دالة الهدف = ٣٥ س + ٤٠ ص
أ	٣٤	صفر	٣٥ × (٣٤) + ٤٠ × (صفر) = ١١٩٠
ب	١٠	٦	٣٥ × (١٠) + ٤٠ × (٦) = ٥٩٠
جـ	صفر	١٦	٣٥ × (صفر) + ٤٠ × (١٦) = ٦٤٠

<u>خامساً: الحل الامثل</u>

وحيث ان دالة الهدف تخفيض التكلفة فان الحل الامثل يمثل الحل الذى يعطى أقل قيمة لدالة الهدف بين الحلول الأساسية الممكنة وهو الحل الذى يتحقق عند النقطة (ب) وبالتالى ننصح المصنع بأن يخصص ١٠ أيام للعامل الأول بينما يخصص ٦ أيام للعامل الثانى لتحقيق أقل تكلفة ممكنة.

تمرين(٣)

أوجد حل البرنامج الخطي التالي:

تعظيم = ٥٠ س + ٦٠ ص

في ظل القيود التالية:

٢ س + ٣ ص ≥ ١٨٠

٣ س + ٢ ص ≥ ١٥٠

قيود عدم السلبية: س ≤ صفر , ص ≤ صفر

الحل

<u>القيد الاول أو المتباينة الاولى</u>

٢ س + ٣ ص ≥ ١٨٠

يتم افتراض أن قيمة س تساوى الصفر وايجاد قيمة ص والعكس

نفترض أن س = صفر

٢ × صفر + ٣ ص = ١٨٠

٣ ص = ١٨٠

ص = ٦٠

نفترض أن ص = صفر

٢ س + ٣ × صفر = ١٨٠

٢ س = ١٨٠

س = ٩٠

<u>القيد الثانى أو المتباينة الثانية</u>

٣ س + ٢ ص ≥ ١٥٠

يتم افتراض أن قيمة س تساوى الصفر وايجاد قيمة ص والعكس

نفترض أن س = صفر

٣ × صفر + ٢ ص = ١٥٠

٢ ص = ١٥٠

ص = ٧٥

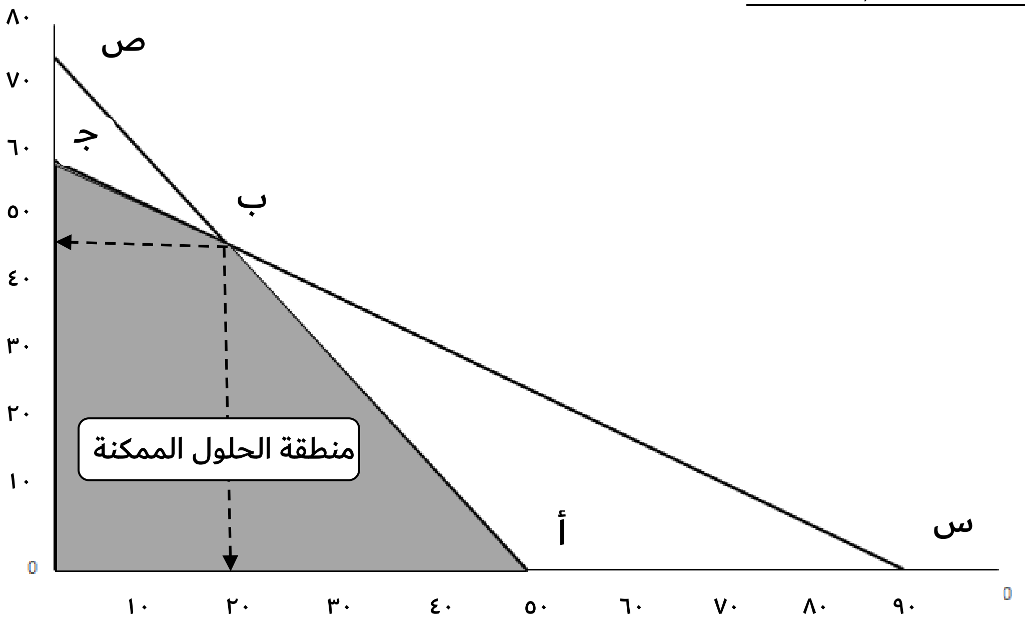
نفترض أن ص = صفر

٣ س + ٢ × صفر = ١٥٠

٣ س = ١٥٠

س = ٥٠

ثانياً: الرسم البيانى



نقاط الحل	س	ص	دالة الهدف = ٥٠ س + ٦٠ ص
أ	٥٠	صفر	٥٠ × (٥٠) + ٦٠ × (صفر) = ٢٥٠٠
ب	٢٠	٤٥	٥٠ × (٢٠) + ٦٠ × (٤٥) = ٣٧٠٠
ج	صفر	٦٠	٥٠ × (صفر) + ٦٠ × (٦٠) = ٣٦٠٠

ثالثاً: **الحل الامثل**

وحيث ان دالة الهدف تعظيم الربح فان الحل الامثل يمثل الحل الذى يعطى أعلى قيمة لدالة الهدف بين الحلول الأساسية الممكنة وهو الحل الذى يتحقق عند النقطة (ب) وبالتالى فان س = ٢٠ ، ص = ٤٥ لتحقيق أكبر ربح ممكن.

تمرين(٤) دالة الهدف : تخفيض ٥٠ س + ٦٠ ص

بشرط :

٢ س + ٣ ص ≥ ٦٠

٤ س + ٢ ص ≥ ٨٠

قيود عدم السلبية : س ≥ صفر ، ص ≥ صفر

الحل

٢ س + ٣ ص ≥ ٦٠

نفترض أن س = صفر

٢ × صفر + ٣ ص = ٦٠

٣ ص = ٦٠

ص = ٢٠

نفترض أن ص = صفر

٢ س + ٣ × صفر = ٦٠

٢ س = ٦٠

س = ٣٠

٤ س + ٢ ص ≥ ٨٠

نفترض أن س = صفر

٤ × صفر + ٢ ص = ٨٠

٢ ص = ٨٠

ص = ٤٠

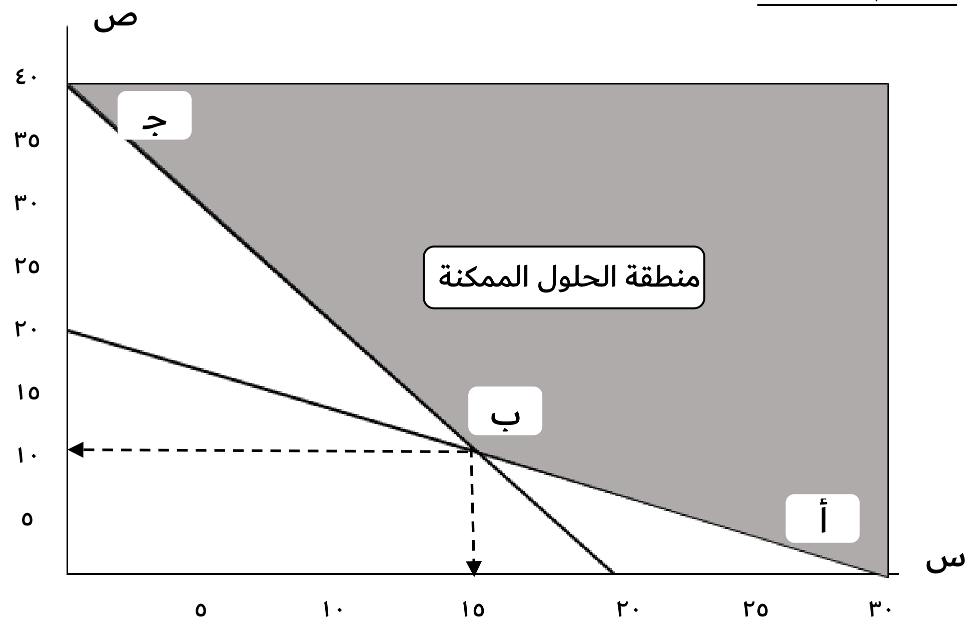
نفترض أن ص = صفر

٤ س + ٢ × صفر = ٨٠

٤ س = ٨٠

س = ٢٠

الرسم البيانى



نقاط الحل	س	ص	دالة الهدف = ٥٠ س + ٦٠ ص
أ	٣٠	صفر	٥٠ × (٣٠) + ٦٠ × (صفر) = ١٥٠٠
ب	١٥	١٠	٥٠ × (١٥) + ٦٠ × (١٠) = ١٣٥٠
ج	صفر	٤٠	٥٠ × (صفر) + ٦٠ × (٤٠) = ٢٤٠٠

خامساً: الحل الامثل

وحيث ان دالة الهدف تخفيض التكلفة فان الحل الامثل يمثل الحل الذى يعطى أقل قيمة لدالة الهدف بين الحلول الأساسية الممكنة وهو الحل الذى يتحقق عند النقطة (ب) وبالتالى فان س = ١٥ ، ص = ١٠ لتحقيق أقل تكلفة ممكنة.

الفصل الرابع

الفئات

Sets

أولاً: تعريف الفئة

هي مجموعة من العناصر التي تشترك في خاصية معينة أو صفة معينة وهذه العناصر محاطة بقوسين { }. وهذه العناصر ممكن أن تكون أرقام أو حروف أو أسماء أو أي شئ آخر. ويتم التعبير عن الفئة بأي حرف من الحروف الأبجدية مثل س ، ص ، ع ، ....إلخ.

على سبيل المثال

- **فئة الأعداد الطبيعية**:

ي = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، .... ، ∞ }

- **فئة الأعداد الصحيحة الفردية من ١ إلى ١٠**

س = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ }

- **فئة الأعداد الصحيحة الزوجية من ١ إلى ١٠**

ص = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ }

- **فئة أيام الأسبوع**

ع = { السبت ، الأحد ، الأثنين ، الثلاثاء ، الأربعاء ، الخميس ، الجمعة }.

- **فئة ألوان الطيف**

ل = { الأحمر ، البرتقالي ، الأصفر ، الأخضر ، الأزرق ، النيلي ، البنفسجي }

ثانياً: أنواع الفئات

١) الفئة الأحادية

وهي الفئة التي تحتوي على عنصر واحد فقط

على سبيل المثال

س = { ٤ }　　　س = { -٦ }　　　س = { ٢٥ }

٢) الفئة الخالية

وهي الفئة التي لا تحتوي على أي عنصر حتى ولو كان الصفر ويرمز لها بالرمز ϕ وتكتب س = { } = ϕ

٣) الفئات المتساوية

هي الفئات التي تحتوي على نفس العناصر. أي إذا كان لدينا الفئة (س) والفئة (ص) فإن الفئة (س) تساوي الفئة (ص) إذا كانت الفئة (س) تحتوي على نفس العناصر الموجودة في الفئة (ص).

على سبيل المثال

س = { ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ }.　　　ص = { ٨ ، ٤ ، ٧ ، ٥ ، ٦ }.

ع = { ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ }.　　　د = { ٨ ، ٤ ، ٧ ، ٥ }.

الفئة (س) تحتوي على نفس العناصر الموجودة في الفئة (ص).

$\therefore$ س = ص

الفئة (ع) لا تحتوي على نفس العناصر الموجودة في الفئة (د).

$\therefore$ س $\neq$ ص

٤) **الفئة الجزئية**

إذا كان لدينا فئتين (س) و(ص) وكان كل عنصر من عناصر الفئة (س) موجود ضمن عناصر الفئة (ص) فأنه يمكن القول أن الفئة (س) فئة جزئية من الفئة (ص) وتكتب س ⊂ ص

على سبيل المثال: إذا كان لدينا:

س = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ } ص = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ }

∴ س ⊂ ص

٥) **الفئة الشاملة**

هي الفئة التي تحتوي على كل العناصر الموجودة في كل الفئات الخاصة بموضوع معين ويرمز لها بالرمز (ى).

على سبيل المثال: إذا كان لدينا الفئات التالية:

س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ص = { ٥ ، ٦ } ع = { ١٠ ، ١١ }

فإن:

ي = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ١٠ ، ١١ }

٦) **الفئة المكملة**

إذا كان لدينا الفئة (س) فإن الفئة المكملة لهذه الفئة هي عبارة عن الفئة التي تحتوي على جميع العناصر الموجودة في الفئة الشاملة (ى) وفي نفس الوقت غير موجودة في الفئة (س) ويرمز للفئة المكملة بالرمز (س/).

على سبيل المثال: إذا كان لدينا الفئات التالية:

ي = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ١٠ ، ١١ } س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

فإن: س/ = { ٥ ، ٦ ، ١٠ ، ١١ }

تمرين (١): إذا كان لديك الفئات التالية:

س = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ }

ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

ع = { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٨ }

أوجد:

1- س/ ٢ - ص/ ٣ - ع/

الحل

لأيجاد س/ ، ص/ ، ع/ يجب أولاً إيجاد الفئة الشاملة (ى) وهي الفئة التي تحتوي على جميع العناصر الموجودة في (س) و(ص) و(ع) دون تكرار أي عنصر.

ي = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٨ }

س/ = { ١ ، ٣ ، ٥ } ⟸ جميع عناصر (ى) الغير موجودة في (س)

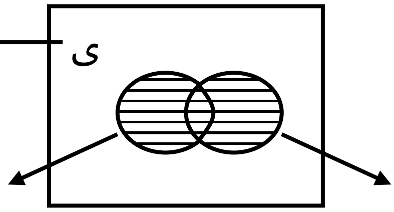
ص/ = { ٥ ، ٦ ، ٨ } ⟸ جميع عناصر (ى) الغير موجودة في (ص)

ع/ = { ١ ، ٢ } ⟸ جميع عناصر (ى) الغير موجودة في (ع)

ثالثاً: العمليات الجبرية على الفئات

(١): إتحاد الفئات

اتحاد الفئتين س ، ص هو عبارة عن العناصر الموجودة فى (س) بالاضافة الى العناصر الموجودة فى (ص) بدون تكرار ويرمز للاتحاد بالرمز وتكتب (س U ص) ويمكن التعبيرعن الاتحاد باستخدام الجزء المظلل فى اشكال فن كالاتى :



تمرين (٢):

إذا كان لديك الفئات التالية:

س = { أ ، ب ، جـ ، د ، هـ }

ص = { ب ، هـ ، و ، ز }

ع = { د ، هـ ، ز ، ح }

أوجد

س U ص ، س U ع ، ص U ع ، س U ص U ع

الحل

س U ص = { أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و ، ز }

س U ع = { أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، ز ، ح

ص U ع = { ب ، هـ ، و ، ز ، د ، ح }

س U ص U ع = { أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و ، ز ، ح }

تمرين (٣):

إذا كان لديك الفئات التالية:

س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ }

ص = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ }

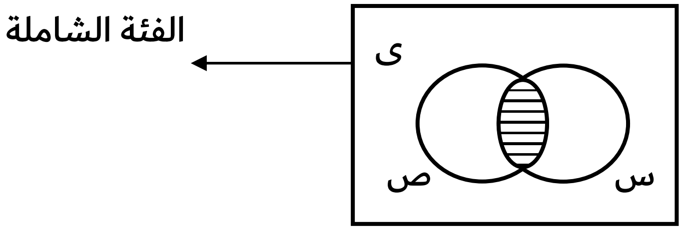
أوجد : س U ص

الحل

س ∪ ص = { ١، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ ، ٨ }

(٢): تقاطع الفئات

تقاطع الفئتين س ، ص هو عبارة عن العناصر المشتركة فى الفئتين ويرمز للتقـاطع بـالرمز (∩) وتكتـب (س ∩ ص)، ويمكـن التعبيـر عـن التقـاطع باستخدام الجزء المظلل فى اشكال فن كالاتى:



تمرين (٤):

إذا كان لديك الفئات التالية:

س = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٩ }

ص = { ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ }

ع = { ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ }

أوجد س ∩ ص ، س ∩ ع ، ص ∩ ع

الحل

س ∩ ص = { ٤ ، ٥ }

س ∩ ع = { ٥ ، ٩ }

ص ∩ ع = { ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ }

تمرين (٥):

إذا كان لديك الفئات التالية:

س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٧ ، ٩ }

ص = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ }

ع = { ١٠ ، ١١ ، ١٢ }

أوجد س ∩ ص ، س ∩ ع ، ص ∩ ع

الحل

س ∩ ص = { ٢ ، ٤ }

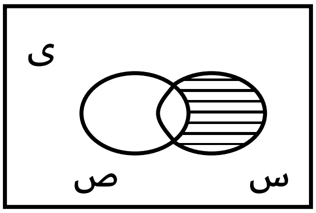
س ∩ ع = { } = ϕ

ص ∩ ع = { } = ϕ

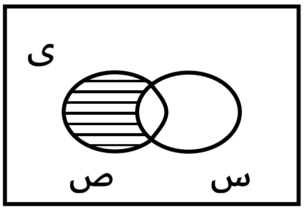
(٣): فرق الفئات

إذا كان لدينا الفئتين س ، ص فإن:

- (س – ص) هي عبارة الفئة التي تحتوي على العناصر الموجودة فى الفئة (س) وغير موجودة في الفئة (ص).
- (ص – س) هي عبارة الفئة التي تحتوي على العناصر الموجودة فى الفئة (ص) وغير موجودة في الفئة (س). ويمكن التعبير عن الفرق بين الفئتين باستخدام الجزء المظلل فى اشكال فن كالاتى:



(س – ص) الجزء المظلل



(ص – س) الجزء المظلل

تمرين (٦):

إذا كان لديك الفئات التالية:

س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٧ ، ٩ }

ص = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ }

ع = { ٦ ، ٨ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ }

أوجد

١- (س – ص)   ٢- (س – ع)   ،   ٣ – (ص – ع)

٤- (ص – س)   ٥- (ع – ص)

الحل

١- (س – ص) = { ١ ، ٣ ، ٧ ، ٩ }

٢- (س – ع) = { ١، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٧ ، ٩ } = س

٣- (ص – ع) = { ٢ ، ٤ }

٤- (ص – س) = { ٦ ، ٨ }

٥- (ع – ص) = { ١٠ ، ١١ ، ١٢ }

تمرين (٧):

إذا كان لديك الفئات التالية:

س = { أ ، ب ، جـ ، د }

ص = { جـ ، هـ ، و ، م ، ن }

ع = { أ ، جـ ، هـ }

أوجد

١- (س U ص)   ٢- (س ∩ ع)   ٣- (س – ص)

٤- (ص – س)

الحل

١- (س U ص) = { أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و ، م ، ن }

٢- (س ∩ ع) = { أ ، جـ }

٣- (س – ص) = { أ ، ب ، د}

٤- (ص – س) = { هـ ، و ، م ، ن}

تمرين (٨):

إذا كان لديك الفئات التالية:

ى = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٨ }

س = { ٢ ، ٣ ، ٤ }

ص = { ٣ ، ٤ ، ٥ }

أوجد

١- س/ ٢- ص/ ٣- (س ∩ ص)/ ٤- س ∩ ص/

٥- س/ ∩ ص

الحل

١- س/ = { ٥ ، ٦ ، ٨ }

٢- ص/ = { ٢ ، ٦ ، ٨ }

(س ∩ ص)/ معناهـا العناصـر الموجـودة في (ى) والغيـر موجـودة فى تقاطع (س) مع (ص) وحيث أن (س ∩ ص) = { ٣ ، ٤ } فان:

٣- (س ∩ ص)/ = { ٢ ، ٥ ، ٦ ، ٨ }

٤- س ∩ ص/ = { ٢ }

٥- س/ ∩ ص = { ٥ }

تمرين (٩):

إذا كان لديك الفئات التالية:

س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ،٥ }

ص = { أ : أ عدد صحيح فردي من ١ إلى ١٠ }

ع = { أ : أ عدد صحيح زوجي من ١ إلى ١٠ }

أوجد

١) الفئة الشاملة   ٢) س/ ∩ ع   ٣) (س U ص)/

٤) (س ∩ ص)/   ٥) س ∩ ص ∩ ع   ٦) (س – ص)

٧) (ص – ع)/   ٨) (س/ – ص)

الحل

س = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ،٥ }   س/ = { ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ }

ص = { أ : أ عدد صحيح فردي من ١ إلى ١٠ } = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ }

ع = { أ : أ عدد صحيح زوجي من ١ إلى ١٠ } = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ }

١) الفئة الشاملة (ى) = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ }

٢) س/ ∩ ع = { ٦ ، ٨ }

٣) بما أن (س U ص) = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧ ، ٩} فان :

(س U ص)/ = { ٦ ، ٨ ، ١٠ }

٤) بما أن (س ∩ ص) = { ١ ، ٣ ، ٥ } فان :

(س ∩ ص)/ = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ }

٥) س ∩ ص ∩ ع = { } = ϕ

٧) (س – ص) = { ٢ ، ٤ }

٨) بما أن (ص – ع) = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ } فان:

(ص ـ ع)$^{/}$ = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ }

٩) (س$^{/}$ – ص) = { ٦ ، ٨ ، ١٠ }

الفصل الخامس

المحددات

Determinants

<u>أولاً: تعريف المحدد</u>

تعتبـر المحـددات أداء رياضـية لتسـهيل الكثيـر مـن العمليـات الرياضـية وخاصة عند حل المعادلات الخطية. ويمكن تعريف المحدد بأنه مجموعة من العناصر مرتبة فى صفوف وأعمدة بشرط تساوى عدد الصفوف مع عدد الأعمدة.

$$\begin{array}{ccc} \begin{vmatrix} ٤ & ٢ \\ ٦ & ٢ \end{vmatrix} & \begin{array}{l} \longrightarrow \text{صف أول} \\ \longrightarrow \text{صف ثانى} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ \text{عمود ثانى} & \text{عمود أول} \end{array} & \end{array}$$

<u>ثانياً: رتبة (درجة) المحدد</u>

تحدد عدد الصفوف وعدد الأعمدة رتبة او درجة المحدد. فالمحدد ذى الرتبة الثانية يتكون من صفين وعمودين، بينما المحدد من الرتبة الثالثة يتكون من ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة، وهكذا....

<u>أمثله</u>

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix}$$

محدد من الدرجة الثانية

$$\begin{vmatrix} ٧ & ١ & ٤ \\ ٦ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٨ & ٣ \end{vmatrix}$$

محدد من الدرجة الثالثة

ثالثاً: مفكوك المحدد

١) مفكوك المحدد من الدرجة الثانية

قيمة (مفكوك) المحدد من الدرجة الثانية (المكون من صفين وعمودين) عبارة عن حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى مطروحا منها حاصل ضرب عناصر القطر الفرعى (غير الرئيسى).

تمرين (١):

أوجد مفكوك المحدد التالى:

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix}$$

حاصل ضرب عناصر القطر الفرعى حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى

الحل: قيمة المحدد = (٥ × ٤) - (٣ × ٢) = ١٤

تمرين (٢):

أوجد مفكوك المحدد التالى:

$$\begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٦ & ١٠ \end{vmatrix}$$

الحل: قيمة المحدد = (٢ × ٦) - (١ × ١٠) = ٢

تمرين (٣):

أوجد مفكوك المحدد التالى:

$$\begin{vmatrix} ٢ & ٣- \\ ٤ & ١ \end{vmatrix}$$

الحل: قيمة المحدد = (-٣ × ٤) - (٢ × ١) = - ١٤

تمرين (٤):

أوجد قيمة س فى المحدد التالى اذا كان:

$$\begin{vmatrix} ١٥ & -٣ \\ ٤ & س \end{vmatrix} = ٤٢$$

الحل: قيمة المحدد = (١٥ × س) - (-٣ × ٤) = ٤٢

١٥ س – (-١٢) = ٤٢

١٥ س + ١٢ = ٤٢

١٥ س = ٤٢ - ١٢

١٥ س = ٣٠

س = ٢

٢) **مفكوك المحدد من الدرجة الثالثة**

هناك عدة طرق لايجاد مفكوك المحدد من الدرجة الثالثة (المكون من ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة) نقتصر منها على طريقة الاقطار المتوازية.

خطوات إيجاد مفكوك المحدد باستخدام طريقة الاقطار المتوازية

(١) وفقاً لهذه الطريقة يتم تكرار عناصر العمود الأول وعناصر العمود الثانى الى يسار المحدد الأساسى.

(٢) ويكون مفكوك المحدد عندئذ هو عبارة عن مجموع حواصل ضرب عناصر الاقطار الرئيسية مطروحا منه مجموع حواصل ضرب عناصر الاقطار الفرعية (غير الرئيسية).

تمرين (٥):

أوجد مفكوك المحدد التالى:

$$أ = \begin{vmatrix} ٥ & ٢ & ٣ \\ ٧ & ٦ & ١ \\ ٤ & ٢ & ١ \end{vmatrix}$$

الحل

يـتم تكـرار عناصـر العمـود الأول وعناصـر العمـود الثـانى الى يسـار المحـدد الأساسى

$$\left|\begin{array}{cc|ccc} ٢ & ٣ & ٥ & ٢ & ٣ \\ ٦ & ١ & ٧ & ٦ & ١ \\ ٢ & ١ & ٤ & ٢ & ١ \end{array}\right|$$

قيمة المحدد = {(٣ × ٦ × ٤) + (٢ × ٧ × ١) + (٥ × ١ × ٢)}

—

{(٢ × ١ × ٤) + (٣ × ٧ × ٢) + (٥ × ٦ × ١)}

قيمة المحدد = ٩٦ – ٨٠ = ١٦

تمرين (٦):

أوجد مفكوك المحدد التالى:

$$أ = \begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ٢ \\ ١ & ٢- & -٤ \\ ٢ & ١- & ١ \end{vmatrix}$$

الحل

$$\left|\begin{array}{cc|ccc} 5 & 2 & 3 & 5 & 2 \\ -2 & -4 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right|$$

قيمة المحدد = $\left[(2 \times -2 \times 2) + (5 \times 1 \times 1) + (3 \times -4 \times -1)\right] - \left[(5 \times -4 \times 2) + (2 \times 1 \times -1) + (3 \times -2 \times 1)\right]$

قيمة المحدد = $9 - (-48) = 57$

رابعاً: خواص المحددات

تتسم المحددات بالعديد من الخصائص التى تسهل فى إيجاد مفكوك المحدد بدون إستخدام الطرق المعتاده، نذكر منها ما يلى:

١) إذا وجد صفين أو عمودين متشابهين فإن قيمة المحدد تساوى صفر

على سبيل المثال:

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \qquad\qquad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 8 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

العمودان الاول والثانى متشابهان   **الصفان الاول والثالث متشابهان**

وبالتالى قيمة كل محدد تساوى الصفر

٢) إذا وجد صف أو عمود جميع عناصره أصفار فإن قيمة المحدد تساوى صفر

على سبيل المثال:

$$\begin{vmatrix} ٠ & ٥ \\ ٠ & ٩ \end{vmatrix} \qquad\qquad \begin{vmatrix} ٨ & ٦ & ٩ \\ ٤ & ١ & ٨ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$$

العمود الثانى جميع عناصره أصفار **الصف الثالث جميع عناصره أصفار**

وبالتالى قيمة كل محدد تساوى الصفر

٣) يمكن أخذ عامل مشترك من بين عناصر صف معين أو عمود وتكون قيمة المحدد عندئذ تساوى قيمة المحدد الجديد × قيمة العامل المشترك.

على سبيل المثال:

$$\begin{vmatrix} ٦ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix} = (٦ \times ٤) - (٢ \times ٣) = ٢٤ - ٦ = ١٨$$

يمكن أخذ الرقم ٢ كعامل مشترك من بين عناصر الصف الاول

$$= ٢ \times \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix} = (٣ \times ٤) - (١ \times ٣) = ٩ \times ٢ = ١٨$$

أو يمكن أخذ الرقم ٣ كعامل مشترك من بين عناصر العمود الاول

$$= ٣ \times \begin{vmatrix} ٢ & ٢ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix} = (٢ \times ٤) - (٢ \times ١) = ٦ \times ٣ = ١٨$$

٤) اذا أبدلنا صفين أو عمودين متجاورين فإن قيمة المحدد تظل كما هى ولكن بإشارة مخالفة.

<u>على سبيل المثال</u>:

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٥ \end{vmatrix} = (٣ \times ٥) - (٢ \times ١) = ١٥ - ٢ = ١٣$$

فإذا أبدلنا العمود الاول مكان العمود الثانى فان قيمة المحدد تظل كما هى ولكن بإشارة مخالفة

$$\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix} = (٢ \times ١) - (٣ \times ٥) = ٢ - ١٥ = -١٣$$

وبالمثل إذا أبدلنا الصف الاول مكان الصف الثانى فان قيمة المحدد تظل كما هى ولكن بإشارة مخالفة

$$\begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} = (١ \times ٢) - (٥ \times ٣) = ٢ - ١٥ = -١٣$$

٥) تحوير المحدد لا يغير من قيمته. بمعنى إذا أبدلنا صفوف المحدد الى أعمدة وأعمدته الى صفوف فإن قيمة المحدد لا تتغير.

<u>على سبيل المثال</u>:

$$\begin{vmatrix} ٤ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{vmatrix} = (٤ \times ٣) - (٥ \times ٢) = ١٢ - ١٠ = ٢$$

فإذا أبدلنا الاعمدة الى صفوف والصفوف الى اعمدة فان قيمة المحدد تظل كما هى كالتالى:

$$\begin{vmatrix} ٤ & ٢ \\ ٥ & ٣ \end{vmatrix} = (٤ \times ٣) - (٢ \times ٥) = ١٢ - ١٠ = ٢$$

٦) اذا وجد محدد جميع عناصره أصفار ما عدا عناصر القطر الرئيسى فان قيمة المحدد تساوى حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى

على سبيل المثال:

$$\begin{vmatrix} ٢ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٤ \end{vmatrix} = ٢ \times ١ \times ٤ = ٨$$

$$\begin{vmatrix} ٥ & ٠ & ٠ \\ ٠ & -٢ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٣ \end{vmatrix} = ٥ \times -٢ \times ٣ = -٣٠$$

٧) يمكن إضافة صف أو أحد مضاعفاته (أو عمود أو أحد مضاعفاته) إلى صف أخر (أو عمود أخر) وذلك لا يغير من قيمة المحدد.

على سبيل المثال:

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٦ \\ ٢ & ٥ \end{vmatrix} = (٣ \times ٥) - (٦ \times ٢) = ١٥ - ١٢ = ٣$$

بإضافة العمود الاول الى العمود الثانى

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٩ \\ ٢ & ٧ \end{vmatrix} = (٣ \times ٧) - (٩ \times ٢) = ٢١ - ١٨ = ٣$$

بإضافة ضعف الصف الاول الى الصف الثانى

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٦ \\ ٨ & ١٧ \end{vmatrix} = (٣ \times ١٧) - (٦ \times ٨) = ٥١ - ٤٨ = ٣$$

٨) إذا كانت مكونات عناصر أى صف (أو أى عمود) تحتوى على حدين فإنه يمكن إعتبار أن المحدد يساوى مجموع حددين أخرين.

على سبيل المثال:

$$\begin{vmatrix} \text{ع} & \text{٣} \\ \text{ص} & \text{٢} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{٣} \\ \text{س} & \text{٢} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{أ} + \text{ع} & \text{٣} \\ \text{س} + \text{ص} & \text{٢} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \text{٥} & \text{٩} \\ -\text{٣} & \text{١} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{٥} & \text{٩} \\ \text{ص} & \text{س} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{٥} & \text{٩} \\ \text{ص} - \text{٣} & \text{س} + \text{١} \end{vmatrix}$$

تمرين (٧):

اثبت باستخدام خواص المحددات أن قيمة المحدد التالى تساوى صفر

$$\begin{vmatrix} \text{١} & \text{٤} & \text{٢} \\ \text{٢} & \text{٣} & \text{٤} \\ \text{٣} & \text{٥} & \text{٦} \end{vmatrix}$$

الحل

بأخذ ٢ عامل مشترك من العمود الاول

$$= \text{٢} \times \begin{vmatrix} \text{١} & \text{٤} & \text{١} \\ \text{٢} & \text{٣} & \text{٢} \\ \text{٣} & \text{٥} & \text{٣} \end{vmatrix}$$

وبما أن عناصر العمود الاول متشابه مع عناصر العمود الثالث فإن قيم المحدد تساوى صفر وبالتالى فإن:

قيمة المحدد = ٢ × صفر = صفر

تمرين (٨):

اثبت باستخدام خواص المحددات أن قيمة المحدد التالى تساوى صفر

$$\begin{vmatrix} ٦ & ٤ & ٢ \\ ٢ & ٣ & ٤ \\ ٩ & ٦ & ٣ \end{vmatrix}$$

الحل

(١) بأخذ ٢ عامل مشترك من الصف الاول

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٢ & ٣ & ٤ \\ ٩ & ٦ & ٣ \end{vmatrix} \times ٢ =$$

(٢) بأخذ ٣ عامل مشترك من الصف الثالث

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٢ & ٣ & ٤ \\ ٣ & ٢ & ١ \end{vmatrix} \times ٣ \times ٢ =$$

وبما أن عناصر الصف الاول متشابه مع عناصر العمود الثالث فإن قيم المحدد تساوى صفر وبالتالى فإن:

قيمة المحدد = ٢ × ٣ × صفر = صفر

تمرين (٩):

اثبت باستخدام خواص المحددات أن قيمة المحدد التالى تساوى صفر

$$\begin{vmatrix} ٢ & ٥ & ٦ \\ ٥ & ٧ & ٩ \\ ٣ & ٢ & ٣ \end{vmatrix}$$

الحل

بإضافة الصف الاول الى الصف الثالث ينتج أن:

$$\begin{vmatrix} ٢ & ٥ & ٦ \\ ٥ & ٧ & ٩ \\ ٥ & ٧ & ٩ \end{vmatrix}$$

وبما أن عناصر الصف الاول متشابه مع عناصر الصف الثالث فإن قيم المحدد تساوى صفر

خامساً: حل المعادلات الخطية بإستخدام المحددات

يمكن إستخدام المحددات فى حل المعادلات الرياضية. ويشاع إستخدامها فى حل المعادلات الخطية الأنية من الدرجة الأولى فى متغيرين أو أكثر. ويلزم أن يكون عدد المعادلات مساوى لعدد المجاهيل أو المتغيرات المراد إيجاد قيمتها.

خطوات إستخدام المحددات فى حل المعادلات فى حالة مجهولين

١) ترتيب المعادلات بحيث يكون على الشكل التالى:

أ$_{١}$ س + ب$_{١}$ ص = ث$_{١}$

أ$_{٢}$ س + ب$_{٢}$ ص = ث$_{٢}$

حيث:

س ، ص : ترمز الى المتغيرات المراد إيجاد قيمتها

أ$_{١}$ ، أ$_{٢}$: ترمز الى معاملات المتغير (س)

ب$_{١}$ ، ب$_{٢}$: ترمز الى معاملات المتغير (ص)

ث$_{١}$ ، ث$_{٢}$: ترمز الى الثوابت

٢) إيجاد مفكوك محدد المعاملات

$$\Delta = \begin{vmatrix} أ_1 & ب_1 \\ أ_2 & ب_2 \end{vmatrix}$$

٣) إيجاد مفكوك محدد س عن طريق إستبدال عمود معاملات س فى محدد المعاملات بعمود الثوابت، وبالتالى يكون محدد س على النحو التالى:

$$\Delta\, س = \begin{vmatrix} ث_1 & ب_1 \\ ث_2 & ب_2 \end{vmatrix}$$

٤) إيجاد مفكوك محدد ص عن طريق إستبدال عمود معاملات ص فى محدد المعاملات بعمود الثوابت، وبالتالى يكون محدد ص على النحو التالى:

$$\Delta ص = \begin{vmatrix} أ_1 & ث_1 \\ أ_2 & ث_2 \end{vmatrix}$$

٥) إيجاد قيمة المتغيرات س ، ص على النحو التالى:

$$س = \frac{\Delta\, س}{\Delta} \qquad ص = \frac{\Delta\, ص}{\Delta}$$

<u>مع ملاحظ أن</u>: اذا كان مفكوك محدد المعاملات مساوى للصفر فإن نظام المعاد ليس له حل

تمرين (١٠):

حل المعادلات الخطية الأتيه بإستخدام المحددات

٣ ص + ٤ س = ١٣

٦ س + ٥ ص - ٢١ = صفر

الحل

٢) ترتيب المعادلات على الشكل التالى:

٤ س + ٣ ص = ١٣

٦ س + ٥ ص = ٢١

٣) إيجاد مفكوك محدد المعاملات

Δ = $\begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ٥ & ٦ \end{vmatrix}$ = (٤ × ٥) – (٣ × ٦) = ٢٠ – ١٨ = ٢

٤) إيجاد مفكوك محدد س باستبدال معاملات س بعمود الثوابت

Δ س = $\begin{vmatrix} ٣ & ١٣ \\ ٥ & ٢١ \end{vmatrix}$ = (١٣ × ٥) – (٣ × ٢١) = ٦٥ – ٦٣ = ٢

٥) إيجاد مفكوك محدد ص باستبدال معاملات ص بعمود الثوابت

Δ ص = $\begin{vmatrix} ١٣ & ٤ \\ ٢١ & ٦ \end{vmatrix}$ = (٤ × ٢١) – (١٣ × ٦) = ٨٤ – ٧٨ = ٦

٦) إيجاد قيمة المتغيرات س ، ص

س = $\dfrac{\Delta \text{ س}}{\Delta}$ = $\dfrac{٢}{٢}$ = ١   ص = $\dfrac{\Delta \text{ ص}}{\Delta}$ = $\dfrac{٦}{٢}$ = ٣

للتأكد من الحل يتم التعويض فى المعادلات الاساسية

٤ × ١ + ٣ × ٣ = ١٣ ✓

٦ × ١ + ٥ × ٣ = ٢١ ✓

تمرين (**١١**): حل المعادلات الخطية الأتيه بإستخدام المحددات

٤ س + ٣ ص - ٧ = صفر

س + ٢ = ٢ ص

الحل

٢) تتيب المعادلات على الشكل التالى:

٤ س + ٣ ص = ٧

س + ٢ ص = – ٢

٣) إيجاد مفكوك محدد المعاملات

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٤ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = (٤ \times ٢) - (٣ \times ١) = ٨ - ٣ = ٥$$

٤) إيجاد مفكوك محدد س باستبدال معاملات س بعمود الثوابت

$$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} ٧ & ٣ \\ -٢ & ٢ \end{vmatrix} = (٧ \times ٢) - (٣ \times -٢) = ١٤ + ٦ = ٢٠$$

٥) إيجاد مفكوك محدد ص باستبدال معاملات ص بعمود الثوابت

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} ٤ & ٧ \\ ١ & -٢ \end{vmatrix} = (٤ \times -٢) - (٧ \times ١) = -٨ - ٧ = -١٥$$

٦) إيجاد قيمة المتغيرات س ، ص

$$\text{س} = \frac{٢٠}{٥} = ٤ \qquad \text{ص} = \frac{-١٥}{٥} = -٣$$

تمرين (١٢): حل المعادلات الخطية الأتيه بإستخدام المحددات

س = ٥ – ٢ ص

٧ ص = ٣ س + ٢٤

الحل

١) ترتيب المعادلات على الشكل التالى:

س + ٢ ص = ٥

- ٣ س + ٧ ص = ٢٤

٢) إيجاد مفكوك محدد المعاملات

$$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ -٣ & ٧ \end{vmatrix}$$ = (١ × ٧) – (٢ × - ٣) = ٧ + ٦ = ١٣

٣) إيجاد مفكوك محدد س باستبدال معاملات س بعمود الثوابت

$$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ ٢٤ & ٧ \end{vmatrix}$$ = (٥ × ٧) – (٢ × ٢٤) = ٣٥ – ٤٨ = - ١٣

٤) إيجاد مفكوك محدد ص باستبدال معاملات ص بعمود الثوابت

$$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ١ & ٥ \\ -٣ & ٢٤ \end{vmatrix}$$ = (١ × ٢٤) – (٥ × - ٣) = ٢٤ + ١٥ = ٣٩

٥) إيجاد قيمة المتغيرات س ، ص

$$س = \frac{-١٣}{١٣} = -١ \qquad ص = \frac{٣٩}{١٣} = ٣$$

الفصل السادس

المصفوفات

Matrices

أولاً: تعريف المصفوفة

يمكـن تعريـف المصـفوفة بأنهـا شـكل أو تعبيـر يحتـوى علـى مجموعـة مـن القيم مرتبة فى صفوف أو أعمدة وليس من الضرورى أن يكون عدد الأعمدة مساوياً لعدد الصفوف. بالأضافة إلى أنه لا يمكن إيجاد مفكوك للمصفوفة فلـيس لهـا قيمـة نهائيـة ولكـن يمكـن إجـراء عـدة عمليـات جبريـة ورياضـية مختلفة على المصفوفة. وفيما يلى عرض أمثلة لبعض أشكال المصفوفة.

$$\begin{bmatrix} ٥ & ٣ & ٢ \\ ١ & ٧ & ٨ \\ & ٤ & ٩ \end{bmatrix}$$

٣ × ٣

$$\begin{bmatrix} ٥ & ٢ \\ ٩ & ٤ \end{bmatrix}$$

٢ × ٢

$$\begin{bmatrix} ٧ & ٢ \\ ٥ & ٨ \\ ٤ & ٦ \end{bmatrix}$$

٢ × ٣

$$\begin{bmatrix} ٥ & ٣ & ٢ \\ ١ & ٧ & ٨ \end{bmatrix}$$

٣ × ٢

يلاحظ أنه يكتب أسفل كل مصفوفة رقم (يمثل عدد الصفوف) × رقم (يمثل عدد الأعمدة) ويمثل ذلك درجة المصفوفة حيث يقال بصفة عامة ان المصفوفة من الدرجة م × ن عندما تتكون من م صف و ن عمود.

ثانياً: الأنواع المختلفة من المصفوفات

(١) المصفوفة المربعة

هى المصفوفة التى يتساوى عدد صفوفها مع عدد أعمدتها وبالتالى تكون مصفوفة فى الشكل ١ × ١ أو ٢ × ٢ أو ٣ × ٣ وهكذا.

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٨ & ١ \\ ٦ & ٢ & ٩ \\ ١ & ٦ & ١٠ \end{bmatrix}_{٣ \times ٣} \qquad \begin{bmatrix} ٥ & ٨ \\ ٧ & ٩ \end{bmatrix}_{٢ \times ٢}$$

(٢) المصفوفة المحورة

هي المصفوفة التي نحصل عليها بعد جعل الصفوف أعمدة والأعمدة صفوف ويرمز لعملية التحوير بالرمز (/) مثل:

$$أ = \begin{bmatrix} ٥ & ١ \\ ٨ & ٩ \end{bmatrix}_{٢ \times ٢} \qquad أ^{/} = \begin{bmatrix} ٩ & ١ \\ ٨ & ٥ \end{bmatrix}_{٢ \times ٢}$$

(٣) المصفوفة الصفرية

هي المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار مثل:

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix}_{٢ \times ٢}$$

(٤) المصفوفة المتماثلة

هى المصفوفة المربعة التى اذا تم تحويرها لوجدنا أنه لم يحدث تغيير فى قيمة كل عنصر فى المصفوفة. ويلاحظ ان جمع عناصر المصفوفة التى تقع اسفل القطر الرئيسى هى نفس العناصر التى تقع أعلى القطر الرئيسى، مثل:

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٨ & ١ \\ ٦ & ٢ & ٨ \\ ١ & ٦ & ٤ \end{bmatrix} = \text{أ}$$

$$\underset{٣ \times ٣}{}$$

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٨ & ١ \\ ٦ & ٢ & ٨ \\ ١ & ٦ & ٤ \end{bmatrix} = \text{أ}^{/}$$

$$\underset{٣ \times ٣}{}$$

(٤) المصفوفة القطرية

هى المصفوفة المربعة التى جميع عناصرها أصفار فيما عدا عناصر القطر الرئيسى، مثل:

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ٢ & ٠ \\ ٥ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

$$\underset{٣ \times ٣}{}$$

(٤) المصفوفة الوحدة

هى المصفوفة المربعة التى جميع عناصرها أصفار فيما عدا عناصر القطر الرئيسى فهى تتكون من الواحد الصحيح، مثل:

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

٣ × ٣

(٥) متجه

وهو المصفوفة التى تتكون من صف واحد فقط أو عمود واحد فقط.

$$\begin{bmatrix} ٩ & ١ \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} ١ \\ ٥ \end{bmatrix}$$

<u>**ثالثاً: العمليات الجبرية الخاصة بالمصفوفات**</u>

(١) جمع وطرح المصفوفات

يمكن جمع وطرح المصفوفات بشرط أن تكون من نفس الدرجة أى أن عدد الصفوف وعدد الأعمدة فى كل منها متساوى. ويتم جمع (أو طرح) كل عنصر من عناصر المصفوفة الأولى مع العنصر المقابل له في المصفوفة الثانية.

تمرين (١) إذا كان لديك المصفوفتين التاليتين:

$$\begin{bmatrix} ٥ & ٢ & ١ \\ ٦ & -٢ & ١ \\ ٩ & ٧ & -٣ \end{bmatrix} = \text{ب} \qquad \begin{bmatrix} ٤ & ٨ & ١ \\ ٦ & ٢ & ٨ \\ ١ & ٦ & ٤ \end{bmatrix} = \text{أ}$$

٣ × ٣   ٣ × ٣

أوجد:

(١) أ + ب   (٢) أ – ب   (٣) ب – أ

الحل

(١) أ + ب

أ + ب =
$$\begin{bmatrix} ١ & ٨ & ٤ \\ ٨ & ٢ & ٦ \\ ٤ & ٦ & ١ \end{bmatrix}_{٣ \times ٣} + \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٥ \\ ١ & -٢ & ٦ \\ -٣ & ٧ & ٩ \end{bmatrix}_{٣ \times ٣}$$

أ + ب =
$$\begin{bmatrix} ٢ & ١٠ & ٩ \\ ٩ & ٠ & ١٢ \\ ١ & ١٣ & ١٠ \end{bmatrix}_{٣ \times ٣}$$

(٢) أ – ب

أ – ب =
$$\begin{bmatrix} ١ & ٨ & ٤ \\ ٨ & ٢ & ٦ \\ ٤ & ٦ & ١ \end{bmatrix}_{٣ \times ٣} - \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٥ \\ ١ & -٢ & ٦ \\ -٣ & ٧ & ٩ \end{bmatrix}_{٣ \times ٣}$$

أ – ب =
$$\begin{bmatrix} ٠ & ٦ & -١ \\ ٧ & ٤ & ٠ \\ ٧ & -١ & -٨ \end{bmatrix}_{٣ \times ٣}$$

(٣) ب – أ

$$\text{ب – أ} = \underset{٣ \times ٣}{\begin{bmatrix} ٥ & ٢ & ١ \\ ٦ & ٢- & ١ \\ ٩ & ٧ & ٣- \end{bmatrix}} - \underset{٣ \times ٣}{\begin{bmatrix} ٤ & ٨ & ١ \\ ٦ & ٢ & ٨ \\ ١ & ٦ & ٤ \end{bmatrix}}$$

$$\text{ب – أ} = \underset{٣ \times ٣}{\begin{bmatrix} ١ & ٦- & ٠ \\ ٠ & ٤- & ٧- \\ ٨ & ١ & ٧- \end{bmatrix}}$$

(٢) ضرب المصفوفة فى رقم ثابت

يمكن ضرب المصفوفة فى رقم ثابت عن طريق ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة فى الرقم الثابت.

تمرين (٢) إذا كان لديك المصفوفة التالية:

$$\text{أ} = \underset{٣ \times ٣}{\begin{bmatrix} ٤ & ٨ & ١ \\ ٦ & ٢ & ٨ \\ ١ & ٦ & ٤ \end{bmatrix}}$$

أوجد:

(١) ٣ أ (٢) ٥ أ

الحل

$$3A = 3 \times \begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 8 & 2 & 6 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 24 & 12 \\ 24 & 4 & 18 \\ 12 & 18 & 3 \end{bmatrix}$$

٣ × ٣   ٣ × ٣

$$5A = 5 \times \begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 8 & 2 & 6 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 40 & 20 \\ 40 & 10 & 30 \\ 20 & 30 & 5 \end{bmatrix}$$

٣ × ٣   ٣ × ٣

(٢) ضرب المصفوفات

يمكن ضرب مصفوفتين بشرط أن يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى مساوى لعدد صفوف المصفوفة الثانية. وتتم عملية الضرب بأخذ عناصر الصف الأول من المصفوفة الأولى وضرب كل منها فيما يقابله من عناصر العمود الاول فى المصفوفة الثانية وبالجمع نحصل على قيمة العنصر الأول فى الصف الأول فى ناتج الضرب. ثم نأخذ عناصر الصف الأول من المصفوفة الأولى وضرب كل منها فيما يقابله من عناصر العمود الثانى فى المصفوفة الثانية وبالجمع نحصل على قيمة العنصر الثانى فى الصف الأول فى ناتج الضرب وهكذا.

تمرين (٣) إذا كان لديك المصفوفة التالية:

$$ج = \begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ ٦ & ٤ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}_{٣ \times ٢} \qquad ص = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٥ \\ ٨ & ٧ & ١ \end{bmatrix}_{٢ \times ٣}$$

أوجد:

(١) ج × ص (٢) ص × جـ

الحل

$$ج \times ص = \begin{bmatrix} ٦ & ٢ \\ ٦ & ٤ \\ ٣ & ١ \end{bmatrix}_{٣ \times ٢} \times \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٥ \\ ٨ & ٧ & ١ \end{bmatrix}_{٢ \times ٣}$$

يلاحظ أن عدد أعمدة المصفوفة الأولى مساوى لعدد صفوف المصفوفة الثانية وبالتالى يجوز ضرب ج × ص كالتالى:

$$ج \times ص = \begin{bmatrix} ٦ \times ٢ + ٢ \times ٨ & ٦ \times ٣ + ٢ \times ٧ & ٦ \times ٥ + ٢ \times ١ \\ ٦ \times ٢ + ٤ \times ٨ & ٦ \times ٣ + ٤ \times ٧ & ٦ \times ٥ + ٤ \times ١ \\ ٣ \times ٢ + ١ \times ٨ & ٣ \times ٣ + ١ \times ٧ & ٣ \times ٥ + ١ \times ١ \end{bmatrix}$$

$$ج \times ص = \begin{bmatrix} ٢٨ & ٣٢ & ٣٢ \\ ٤٤ & ٤٦ & ٣٤ \\ ١٤ & ١٦ & ١٦ \end{bmatrix}$$

$$\underset{\text{٢ × ٣}}{\begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ ٤ & ٦ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix}} \times \underset{\text{٣ × ٢}}{\begin{bmatrix} ٥ & ٣ & ٢ \\ ١ & ٧ & ٨ \end{bmatrix}} = \text{ص × جـ}$$

يلاحـظ أن عـدد أعمـدة المصـفوفة الأولى غيـر مسـاوى لعـدد صـفوف المصفوفة الثانية وبالتالى لا يجوز ضرب ص × جـ

تمرين (٤) إذا كان لديك المصفوفات التالية:

$$\underset{\text{٣ × ٣}}{\begin{bmatrix} -٣ & ٦ & ١١ \\ -٥ & ٢ & ١ \\ ١٢ & ٩ & ٧ \end{bmatrix}} = \text{ب} \qquad \underset{\text{٣ × ٣}}{\begin{bmatrix} ٧ & ٥ & ٢ \\ ٣ & -٢ & ٦ \\ ١ & ٤ & ٨ \end{bmatrix}} = \text{أ}$$

$$\underset{\text{٢ × ٣}}{\begin{bmatrix} ٧ & ٨ \\ -٨ & ٥ \\ -١ & ٩ \end{bmatrix}} = \text{ص} \qquad \underset{\text{٣ × ٢}}{\begin{bmatrix} ٣ & ١ & ٨ \\ ٤ & ٢ & ٥ \end{bmatrix}} = \text{جـ}$$

أوجد:

(١) أ + ب　　(٢) أ – ب　　(٣) ب – ص

(٤) ٣ ب　　(٥) جـ × ص　　(٦) ص × جـ

(٧) ب/　　(٨) جـ/　　(٩) ٣ × جـ/

الحل

(١) أ + ب

$$\text{أ + ب} = \underset{٣ \times ٣}{\begin{bmatrix} ٧ & ٥ & ٢ \\ ٣ & ٢- & ٦ \\ ١ & ٤ & ٨ \end{bmatrix}} + \underset{٣ \times ٣}{\begin{bmatrix} ٣- & ٦ & ١١ \\ ٥- & ٢ & ١ \\ ١٢ & ٩ & ٧ \end{bmatrix}}$$

$$\text{أ + ب} = \underset{٣ \times ٣}{\begin{bmatrix} ٤ & ١١ & ١٣ \\ ٢- & ٠ & ٧ \\ ١٣ & ١٣ & ١٥ \end{bmatrix}}$$

(٢) أ – ب

$$\text{أ – ب} = \underset{٣ \times ٣}{\begin{bmatrix} ٧ & ٥ & ٢ \\ ٣ & ٢- & ٦ \\ ١ & ٤ & ٨ \end{bmatrix}} - \underset{٣ \times ٣}{\begin{bmatrix} ٣- & ٦ & ١١ \\ ٥- & ٢ & ١ \\ ١٢ & ٩ & ٧ \end{bmatrix}}$$

$$\text{أ – ب} = \underset{٣ \times ٣}{\begin{bmatrix} ١٠ & ١- & ٩- \\ ٨ & ٤- & ٥ \\ ١١- & ٥- & ١ \end{bmatrix}}$$

(٣) ب – ص لا يجوز طرح المصفوفتين لانهما ليس من نفس الدرجة

(٤) ٣ × ب

$$\underset{٣ \times ٣}{\begin{bmatrix} -٩ & ١٨ & ٣٣ \\ -١٥ & ٦ & ٣ \\ ٣٦ & ٢٧ & ٢١ \end{bmatrix}} = \underset{٣ \times ٣}{\begin{bmatrix} -٣ & ٦ & ١١ \\ -٥ & ٢ & ١ \\ ١٢ & ٩ & ٧ \end{bmatrix}} \times ٣ = \text{ب} \times ٣$$

(٤) جـ × ص

$$\underset{٢ \times ٣}{\begin{bmatrix} ٧ & ٨ \\ -٨ & ٥ \\ -١ & ٩ \end{bmatrix}} \times \underset{٣ \times ٢}{\begin{bmatrix} ٣ & ١ & ٨ \\ ٤ & ٢ & ٥ \end{bmatrix}} = \text{ص} \times \text{جـ}$$

$$\begin{bmatrix} -١ \times ٣ + -٨ \times ١ + ٧ \times ٨ & ٩ \times ٣ + ٥ \times ١ + ٨ \times ٨ \\ -١ \times ٤ + -٨ \times ٢ + ٧ \times ٥ & ٩ \times ٤ + ٥ \times ٢ + ٨ \times ٥ \end{bmatrix} = \text{ص} \times \text{جـ}$$

$$\underset{٢ \times ٢}{\begin{bmatrix} ٤٥ & ٩٦ \\ ١٥ & ٨٦ \end{bmatrix}} = \text{ص} \times \text{جـ}$$

(٦) ص × جـ

$$\text{جـ} \times \text{ص} = \underset{3 \times 2}{\begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 5 & -8 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}} \times \underset{2 \times 3}{\begin{bmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}}$$

$$\text{جـ} \times \text{ص} = \begin{bmatrix} 8 \times 8 + 7 \times 5 & 8 \times 1 + 7 \times 2 & 8 \times 3 + 7 \times 4 \\ 5 \times 8 + -8 \times 5 & 5 \times 1 + -8 \times 2 & 5 \times 3 + -8 \times 4 \\ 9 \times 8 + -1 \times 5 & 9 \times 1 + -1 \times 2 & 9 \times 3 + -1 \times 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{جـ} \times \text{ص} = \underset{3 \times 3}{\begin{bmatrix} 99 & 22 & 52 \\ 0 & -11 & -17 \\ 67 & 7 & 23 \end{bmatrix}}$$

(٧) ب /

$$\text{ب} = \underset{3 \times 3}{\begin{bmatrix} 11 & 6 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 7 & 9 & 12 \end{bmatrix}} \qquad \text{ب}^{/} = \underset{3 \times 3}{\begin{bmatrix} 11 & 1 & 7 \\ 6 & 2 & 9 \\ -3 & -5 & 12 \end{bmatrix}}$$

(٨) جـ/

$$\begin{bmatrix} ٣ & ١ & ٨ \\ ٤ & ٢ & ٥ \end{bmatrix} = \text{جـ}$$

٣ × ٢

$$\begin{bmatrix} ٥ & ٨ \\ ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} = \text{جـ}^{/}$$

٣ × ٢

(٩) ٣ × جـ/

$$\begin{bmatrix} ١٥ & ٢٤ \\ ٦ & ٣ \\ ١٢ & ٩ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٥ & ٨ \\ ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{bmatrix} \times ٣ = \text{جـ}^{/} \times ٣$$

٣ × ٢   ٣ × ٢

الفصل السابع

التفاضل

Derivative

أولاً: تعريف التفاضل

يمكن تعريف التفاضل أو المعامل التفاضلي الأول للدالة (ص)بالنسبة إلى (س) بأنه نهاية معدل التغير Δ ص عندما تؤول Δ س إلي الصفر وهو ما يسمي معدل التغير اللحظي للدالة ص= د(س) عند النقطة س.

ثانياً: قواعد التفاضل

قاعدة (١)

إذا كانت ص = ث حيث ث مقدار ثابت فإن $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = صفر

وهذا يعني أنه إذا كانت ص = مقدار ثابت فإن تفاضل هذه الدالة يساوى صفراً.

تمرين (١): أوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ للدوال الآتية:

(١) ص = ٥ (٢) ص = ٨ (٣) ص = -٣

الحل

(١) ص = ٥ (مقدار ثابت)

$\therefore$ $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = صفر

(٢) ص = ٨ (مقدار ثابت)

$$\therefore \quad \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{صفر}$$

(٣) ص = -٣ (مقدار ثابت)

$$\therefore \quad \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{صفر}$$

قاعدة (٢)

إذا كانت ص = س^{ن} حيث ث مقدار ثابت فإن :

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{ن س}^{\text{ن-١}}$$

تمرين (٢): أوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ للدوال الآتية:

ص = س^{٣} ، (٢) ص = س^{٨} ، (٣) ص = س$^{-٥}$

الحل

(١)ص = س^{٣}

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ٣\ \text{س}^{٣-١} = ٣\ \text{س}^{٢}$$

(٢)ص = س^{٨}

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ٨\ \text{س}^{٨-١} = ٨\ \text{س}^{٧}$$

(٣) ص = س$^{-٥}$

$$\frac{ء ص}{ء س} = -٥ \text{ س}^{-٥-١} = -٥ \text{ س}^{-٦}$$

قاعدة (٣)

إذا كانت ص = أ س^{ن} حيث أ معامل س فإن :

$$\frac{ء ص}{ء س} = أ \times ن \text{ س}^{ن-١}$$

تمرين (٣): أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ للدوال الآتية:

الحل

(١) ص = ٥س^{٢}

$$\frac{ء ص}{ء س} = ٥ \times ٢ \text{ س}^{٢-١} = ١٠ \text{ س}$$

(٢) ص = ٣س^{٥}

$$\frac{ء ص}{ء س} = ٣ \times ٥ \text{ س}^{٥-١} = ١٥\text{س}^{٤}$$

(٣) ص = ٤س$^{-٣}$

$$\frac{ء ص}{ء س} = ٤ \times -٣ \text{ س}^{٣} = -١٢\text{س}^{-٤}$$

قاعدة (٤)

إذا كانت ص = س حيث ث مقدار ثابت فإن:

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{١}$$

تمرين (٤): أوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ للدوال الآتية:

(١) ص = ١٠ س　　　(٢) ص = س　　　(٣) ص = -٣ س

(٤) ص= ٥س$^{\text{٣}}$ + ٤س$^{\text{٢}}$ + ٣س + ٥

الحل

(١) ص = ١٠ س　　　(مقدار ثابت)

$$\therefore \quad \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{١٠}$$

(٢) ص = س　　　(مقدار ثابت)

$$\therefore \quad \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{١}$$

(٣) ص = -٣ س　　　(مقدار ثابت)

$$\therefore \quad \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{- ٣}$$

(٤) ص= ٥ س$^{\text{٣}}$ + ٤ س$^{\text{٢}}$ + ٣ س + ٥

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{٥×٣ س}^{\text{٣-١}} + \text{٤×٢ س}^{\text{٢-١}} + \text{٣} = \text{١٥ س}^{\text{٢}} + \text{٨ س} + \text{٣}$$

قاعدة (٥)

إذا كانت الدالة (ص) عبارة عن حاصل ضرب دالتين فإن :

$\frac{\text{ع ص}}{\text{ع س}}$ = الدالة الأولي x تفاضل الثانية + الدالة الثانية x تفاضل الاولي

تمرين (٥): أوجد $\frac{\text{ع ص}}{\text{ع س}}$ للدوال الآتية:

(١) ص = (٥س^{٣} + ٢ س^{٢}) (٥ س +٧)

(٢) ص = (٢ س + ٣) (٤س^{٢} + ٥)

الحل

(١) ص = (٥ س^{٣} + ٢س^{٢}) (٥ س + ٧)

$\frac{\text{ع ص}}{\text{ع س}}$ = الدالة الأولي x تفاضل الثانية + الدالة الثانية x تفاضل الاولي

= (٥س^{٣} + ٢س^{٢}) x (٥+ صفر) + (٥س+٧) x (١٥س^{٢} +٤س)

= (٥س^{٣} + ٢س^{٢}) x ٥ + (٥س+٧) x (١٥س^{٢} +٤س)

(٢) ص = (٢س + ٣) (٤س^{٢} + ٥)

$\frac{\text{ع ص}}{\text{ع س}}$ = الدالة الأولي x تفاضل الثانية + الدالة الثانية x تفاضل الاولي

= (٢س+ ٣) x (٨ س + صفر) + (٤س^{٢}+٥) x (٢ +صفر)

= (٢س + ٣) x ٨ س + (٤س^{٢}+٥) x ٢

قاعدة (٦)

إذا كانت الدالة (ص) عبارة عن خارج قسمة دالتين فإن :

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{\text{المقام} \times \text{تفاضل البسط} - \text{البسط} \times \text{تفاضل المقام}}{(\text{المقام})^{٢}}$$

تمرين (٦): أوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ للدوال الآتية:

(١) $\text{ص} = \frac{٤\ \text{س} + ٨}{٥\ \text{س}^{٢} + ٣\ \text{س} + ١٠}$

(٢) $\text{ص} = \frac{٢\ \text{س}}{\text{س} + ١}$

الحل

(١) $\text{ص} = \frac{٤\ \text{س} + ٨}{٥\ \text{س}^{٢} + ٣\ \text{س} + ١٠}$

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{\text{المقام} \times \text{تفاضل البسط} - \text{البسط} \times \text{تفاضل المقام}}{(\text{المقام})^{٢}}$$

$$= \frac{(٥\text{س}^{٢}+٣\text{س}+١٠) \times ٤ - (٤\text{س}+٨) \times (١٠\text{س}+٣)}{(٥\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ١٠)^{٢}}$$

(٢) $\text{ص} = \frac{٢\ \text{س}}{\text{س} + ١}$

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{\text{المقام} \times \text{تفاضل البسط} - \text{البسط} \times \text{تفاضل المقام}}{(\text{المقام})^{٢}}$$

$$= \frac{(س + ١) \times ٢ - (٢ س) \times ١}{(س + ١)^{٢}}$$

قاعدة (٧)

إذا كانت ص = $هـ^{س}$ فإن:

$$\frac{ء ص}{ء س} = هـ^{س} \times \text{تفاضل أس الدالة}$$

تمرين (٧): أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$ للدوال الآتية:

(١) ص = $هـ^{٢ س}$

(٢) ص = $هـ^{(٣ س + ٦)}$

(٣) ص = $هـ^{(-٢ س + ١٠)}$

الحل

(١) ص = $هـ^{٢س}$

$$\frac{ء ص}{ء س} = هـ^{س} \times ٢$$

(٢) ص = $هـ^{(٣س+٦)}$

$$\frac{ء ص}{ء س} = هـ^{(٣س+٦)} \times ٣$$

(٣) ص = $هـ^{(-٢ س+١٠)}$

$$\frac{ء ص}{ء س} = هـ^{(-٢ س+١٠)} \times (-٢)$$

قاعدة (٨)

إذا كانت ص = لوهـ (مقدار معين) فإن:

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{\text{تفاضل المقدار}}{\text{المقدار نفسه}}$$

تمرين (٨): أوجد $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ للدوال الآتية:

(١) ص = لوهـ س^{٢}

(٢) ص = لوهـ (٥ س^{٢} + ٣ س + ١٠)

الحل

(١) ص = لوهـ س^{٢}

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{\text{٢ س}}{\text{س}^{٢}}$$

(١) ص = لوهـ (٥ س^{٢} + ٣ س + ١٠)

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \frac{\text{١٠ س + ٣}}{\text{(٥ س}^{٢}\text{ + ٣ س + ١٠)}}$$

ثالثاً: إستخدام التفاضل في بعض المفاهيم الاقتصادية

(١) التكلفة الحدية

تعرف التكلفة الحدية بأنها مقدار التغير في التكلفة الكلية نتيجة إنتاج وحدة واحدة إضافية، ويتم حسابها كالآتي:

التكلفة الحدية = المعامل التفاضلي الأول لدالة التكلفة الكلية

(٢) الإيراد الحدي

يعرف الإيراد الحدي بأنه مقدار التغير في الإيراد الكلي نتيجة بيع وحدة واحدة إضافية، ويتم حسابه كالآتي:

الإيراد الحدية = المعامل التفاضلي الأول لدالة الإيراد الكلية

تمرين (٩) :

إذا كانت دالة التكلفة (ك) لأحدي السلع تمثلها المعادلة الآتية:

ك = ٣ س^{٢} + ٢ س + ٨

حيث : س: عدد الوحدات المنتجة من السلعة

المطلوب:

(١) إيجاد دالة التكلفة الحدية

(٢) أحسب قيمة التكلفة الحدية عند انتاج الوحدة الخامسة .

الحل

التكلفة الكلية (ك) = ٣ س^{٢} + ٢ س + ٨

(١) إيجاد التكلفة الحدية

التكلفة الحدية = المعامل التفاضلي الأول لدالة التكلفة الكلية

$$\frac{ء ك}{ء س} = ٦س + ٢ + صفر$$

(٢) إيجاد القيمة الحدية عند انتاج الوحدة الخامسة

أي أن المطلوب إيجاد قيمة التكلفة الحدية عند س = ٥

التكلفة الحدية = ٦ س + ٢

= ٦ x ٥ + ٢

= ٣٢

تمرين (١٠):

إذا كانت دالة الإيراد الكلي (ي) لإحدى السلع هي:

ى = -٠,١ س ^{٢} + ٧٠٠ س

بينما كانت دالة الإيراد التكلفة الكلية (ك) لهذه السلعة هي :

ك = ٣٠٠ س + ٨٠٠٠

حيث: س : عدد الوحدات المنتجة

المطلوب إيجاد كل من:

(١) دالة الإيراد الحدي

(٢) دالة التكلفة الحدية

الحل

(١) إيجاد دالة الإيراد الحدي

الايراد الكلى (ى)= -٠,١ س ^{٢} + ٧٠٠ س

الإيراد الحدي = المعامل التفاضلي الأول لدالة الإيراد الكلي

$$\frac{\text{ء ي}}{\text{ء س}} = -٠,٢ \text{ س } + ٧٠٠$$

(٢) إيجاد التكلفة الحدية

التكلفة الحدية (ك) = ٣٠٠ س + ٨٠٠٠

التكلفة الحدية = المعامل التفاضلي الأول لدالة التكلفة الكلية

$$\frac{\text{ء ك}}{\text{ء س}} = ٣٠٠$$

رابعاً: المعاملات التفاضلية العليا

يقصد بالمعاملات التفاضلية العليا هي المعاملات التفاضلية الأعلى من الأولى أي المعاملات التفاضلية الثانية والثالثة والرابعة و .... الخ. وسوف نرمز للمعامل التفاضلي الثاني للدالة (ص) بالرمز ص/ بينما المعامل التفاضلى الثالث بالرمز ص// ....وهكذا.

مع ملاحظة ان:

(١) ص// = تفاضل ص/

(٢) ص/// = تفاضل ص//

(٢) ص//// = تفاضل ص///

وهكذا...................

تمرين (١١):

أوجد المعامل التفاضلي الأول والثاني والثالث للدالة الآتية:

ص = ٥ س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٨ س + ١٠

الحل

ص = ٥ س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٨ س + ١٠

(١) **المعامل التفاضلي الأول**

ص$^{/}$ = ١٥ س^{٢} + ٦ س + صفر

(٢) **المعامل التفاضلي الثانى**

ص$^{//}$= ٣٠ س + ٦

(٣) **المعامل التفاضلي الثالث**

ص$^{///}$ = ٣٠

تمرين (**١٢**):

أوجد المعاملات التفاضلية العليا للدالة الآتية:

ص = ٣ س^{٤} + ٦ س^{٢} + ٢ س + ١٠

الحل

ص = ٣ س^{٤} + ٦ س^{٢} + ٢ س + ١٠

(١) **المعامل التفاضلي الأول**

ص$^{/}$ = ١٢ س^{٣} + ١٢ س + صفر

(٢) **المعامل التفاضلي الثانى**

ص$^{//}$= ٣٦ س^{٢} + ١٢

(٣) **المعامل التفاضلي الثالث**

ص$^{///}$ = ٧٢ س

(٤) **المعامل التفاضلي الرابع**

ص$^{////}$ = ٧٢

(٥) المعامل التفاضلي الثالث

$ص^{////}$ = صفر

خامساً: النهايات العظمي والصغرى للدوال التي تحتوي علي متغير مستقل واحد فقط (س)

- تستخدم النهايات العظمى في تحديد قيمة (س) التي تبلغ عندها الدالة ص = د(س) نهايتها العظمي، علي سبيل المثال تحديد عدد الوحدات الواجب إنتاجها لتحقيق أعظم ربح ممكن.
- تستخدم النهاية الصغرى تستخدم في تحديد قيمة (س) التي تبلغ عندها الدالة ص = د(س) نهايتها الصغرى ، علي سبيل المثال تحديد عدد الوحدات الواجب إنتاجها لتحقيق أقل تكلفة ممكنة .

خطوات تحقيق النهاية العظمى للدالة ص = د(س)

لتحقيق النهاية العظمي للدالة ص = د(س) يلزم توافر شرطين:

(١) إيجاد المعامل التفاضلي الأول للدالة ثم نساويه بالصفر فنحصل على قيمة س

(٢) إيجاد المعامل التفاضلي الثاني للدالة ويلزم أن يكون الناتج رقم سالب

خطوات تحقيق النهاية الصغرى للدالة ص = د(س)

لتحقيق النهاية العظمي للدالة ص = د(س) يلزم توافر شرطين

(١) إيجاد المعامل التفاضلي الأول للدالة ثم نساويه بالصفر فنحصل على قيمة س

(٢) إيجاد المعامل التفاضلي الثاني للدالة ويلزم أن يكون الناتج رقم موجب

تمرين (١٣):

اوجد النهاية العظمي او الصغرى للدالة الآتية:

$$ص = ٢ س^{٢} - ٢٠ س + ٣$$

الحل

(١) إيجاد المعامل التفاضلي للدالة (ص) ثم نساويه بالصفر فنحصل علي قيمة (س)

$$ص^{/} = ٤ س - ٢٠$$

$$\therefore ٤ س - ٢٠ = صفر$$

$$٤ س = ٢٠$$

$$س = ٥$$

(٢) إيجاد معامل التفاضلي الثاني للدالة (ص)

$ص^{//} = ٤$ (موجب)

وحيث أن المعامل التفاضلي الثاني رقم موجب كما نها نهاية صغرى عند $س = ٥$

تمرين (١٤):

شركة لتوزيع أدوات التجميل وجدت أن أرباحها السنوية (ر) تعتمد علي عدد الموزعين (س) لإنتاجها و تمثلها المعادلة الآتية:

$$ر = - ١٢,٥ س^{٢} + ١٣٧٥ س - ١٥٠٠$$

المطلوب تحديد عدد الموزعين (س) التي يحقق أعظم ربح سنوي ممكن؟

الحل

خطوات تحقيق النهاية العظمي للربح

(١) إيجـاد المعامـل التفاضـلي الأول لمعادلـة الـربح ثـم نسـاويه بالصـفر فنحصل علي قيمة س

$$ر = -١٢,٥س^{٢} + ١٣٧٥ س - ١٥٠٠$$

$$ر^{/} = -٢٥ س + ١٣٧٥$$

$$\therefore -٢٥ س + ١٣٧٥ = صفر$$

$$٢٥ س = ١٣٧٥$$

$$س = ٥٥ \quad وحدة$$

(٢) إيجـاد المعامـل التفاضـلي الثـاني لمعادلـة الـربح ويلـزم ان يكـون النـاتج رقم سالب

$$ر^{//} = -٢٥$$

∴ حجم الإنتاج (س) الذي يحقق أعظم ربح ممكن يساوي ٥٥ وحدة

تمرين (**١٥**):

اذا كانـت دالـة الايـراد الكلـى هـى ى = ١٤ س وكانـت دالـة التكـاليف الكليـة للإنتاج هي ك $= ٠,٠٢س^{٢} + ٢ س + ٥٠$

فما هو حجم الإنتاج الذي يحقق أعظم ربح ممكن؟ وما مقدار هذا الربح؟

الحل

نلاحظ عدم وجود معادلة الربح وبالتالى يجب إيجادها أولاً

(**١**) **إيجاد معادلة الربح كالآتي**:

الربح = الإيراد الكلي - التكلفة الكلية

$$ر = ١٤ س - (٠,٠٢س^{٢} + ٢ س + ٥٠)$$

$$ر = ١٤ س - ٠,٠٢س^{٢} - ٢ س - ٥٠$$

ر = − ٠,٠٢س^{٢} + ١٢ س − ٥٠

(٢) خطوات تحقيق النهاية العظمي للربح

(١) إيجـاد المعامـل التفاضـلي الأول لمعادلـة الـربح ثـم نسـاويه بالصـفر فنحصل علي قيمة س

ر = − ٠,٠٢س^{٢} + ١٢ س − ٥٠

ر$^{/}$ = − ٠,٠٤س + ١٢

∴ − ٠,٠٤س + ١٢ = صفر

٠,٠٤ س = ١٢

س = ٣٠٠ وحدة

(٢) إيجاد المعامل التفاضلي الثاني لمعادلة الربح ويلزم ان يكون الناتج رقم سالب

ر$^{//}$ = − ٠,٠٤

∴ حجم الإنتاج (س) الذي يحقق أعظم ربح ممكن يساوي ٣٠٠ وحدة

<u>مقدار الربح (ر)</u>

ر = −٠,٠٢س^{٢} + ١٢ س - ٥٠

ر = −٠,٠٢x ٩٠٠٠٠ + ٣٦٠٠ - ٥٠

ر = - ١٨٠٠ + ٣٦٠٠ - ٥٠

ر = ١٧٥٠ ج

تمرين (١٦):

اذا كانت دالة الايراد الكلى تمثلها المعادلة الآتية:

ي = ٢٠٥ س − ٠,٩٥ س^{٢}

بينما كانت معادلة التكلفة الكلية لهذه السلعة هي:

ك = ٠,٠٥ س^{٢} + ٥ س + ٢٠٠

مــاهي عـدد الوحـدات المنتجـة (س) التـي تحقـق أعظـم ربـح ممكـن؟ وما مقدار هذا الربح؟

الحل

(١) **إيجاد معادلة الربح كالآتي**:

الربح = الإيراد الكلي (–) التكلفة الكلية

ر = ٢٠٥ س – ٠,٩٥ س^{٢} – (٠,٠٥ س^{٢} + ٥ س + ٢٠٠)

ر = ٢٠٥ س – ٠,٩٥ س^{٢} – ٠,٠٥ س^{٢} – ٥ س – ٢٠٠

ر = – س^{٢} + ٢٠٠ س - ٢٠٠

(٢) **خطوات تحقيق النهاية العظمي للربح**

(١) إيجـاد المعامـل التفاضـلي الأول لمعادلـة الـربح ثـم نسـاويه بالصـفر فنحصل علي قيمة س

ر = – س^{٢} + ٢٠٠ س - ٢٠٠

ر$^{/}$ = – ٢ س + ٢٠٠

∴ – ٢ س + ٢٠٠ = صفر

٢ س = ٢٠٠

س = ١٠٠ وحدة

(٢) إيجاد المعامل التفاضلي الثاني لمعادلة الربح ويلزم ان يكون الناتج رقم سالب

ر$^{//}$ = – ٢

∴ حجم الإنتاج (س) الذي يحقق أعظم ربح ممكن يساوي ١٠٠ وحدة

مقدار الربح (ر)

ر = – س^{٢} + ٢٠٠ س - ٢٠٠

ر = –(١٠٠)^{٢} + ٢٠٠ × (١٠٠) - ٢٠٠

ر = – ١٠٠٠٠ + ٢٠٠٠٠ – ٢٠٠

ر = ٩٨٠٠ ج

تمرين (١٧):

اذا كانت التكلفة الثابتة (ث) لإنتاج (س) وحدة من منتج معين هي ١٠٠ جنية كما كانت التكلفة المتغيرة (م) لإنتاج (س) وحدة تمثلها المعادلة الآتية :

م= ١٠ س^{٢} – ٢٠٠ س

أوجد عدد الوحدات المنتجة (س) التي تحقق أقل تكلفة ممكنة؟

الحل

(١) إيجاد معادلة التكلفة الكلية كالآتي:

التكلفة الكلية = التكلفة الثابتة + التكلفة المتغيرة

ك = ١٠٠ + ١٠ س^{٢} – ٢٠٠ س

٢) خطوات تحقيق النهاية الصغرى للتكلفة

(١) إيجاد المعامل التفاضلي الأول لمعادلة التكاليف الكلية ثم نساويه بالصفر فنحصل علي قيمة س

ك = ١٠٠ + ١٠ س^{٢} – ٢٠٠ س

ك/ = ١٠ س – ٢٠٠

∴ ١٠ س – ٢٠٠ = صفر

١٠ س = ٢٠٠

س = ٢٠ وحدة

(٢) إيجاد المعامل التفاضلي الثاني لمعادلة التكاليف الكلية ويلزم ان يكون الناتج رقم موجب

ك// = ١٠

∴ حجم الإنتاج (س) الذي يحقق أقل تكلفة ممكن يساوي ٢٠ وحدة

الفصل الثامن

التكامل

Integration

<u>أولاً: مفهوم التكامل</u>

التكامل هو عملية حساب المساحة تحت المنحنيات التى تعبر عنها دوال رياضـية معينـة مثـل المسـاحة أو الحجـم أو الكتلـة أو أي مجمـوع لعناصـر متناهية في الصغر . وأيضاً يمكن أن يُنظر إلى عملية التكامل على أنها عملية عكسية لعملية التفاضل. ويرمز له بالرمز $\int$.

<u>ثانياً: قواعد التكامل</u>

فيما يلى القواعد الأساسية للتكامل:

قاعدة (١)

$$\int \text{أ}\ \text{ء س} = \text{أ} \times \text{س} + \text{ث}$$

<u>حيث ان:</u>

أ ، ث : مقادير ثابتة

تمرين (١): أوجد كل من:

(١) $\int ٩\ \text{ء س}$ (٢) $\int ١١\ \text{ء س}$ (٣) $\int -١\ \text{ء س}$

الحل

(١) $\int ٩\ \text{ء س} = ٩\ \text{س} + \text{ث}$

(٢) $\int ١١\ \text{ء س} = ١١\ \text{س} + \text{ث}$

(٣) $\int -١\ \text{ء س} = -١\ \text{س} + \text{ث}$

قاعدة (٢)

$$\int س^{ن}\ ء س = \frac{س^{ن+1}}{ن + 1} + ث$$

تمرين (٢): أوجد كل من:

(١) $\int س^{٥}\ ء س$ (٢) $\int س^{٧}\ ء س$ (٣) $\int س^{-٨}\ ء س$

الحل

(١) $\int س^{٥}\ ء س = \frac{س^{٥+١}}{٥ + ١} + ث = \frac{س^{٦}}{٦} + ث$

(٢) $\int س^{٧}\ ء س = \frac{س^{٧+١}}{٧ + ١} + ث = \frac{س^{٨}}{٨} + ث$

(٣) $\int س^{-٨}\ ء س = \frac{س^{-٨+١}}{-٨ + ١} + ث = \frac{س^{-٧}}{-٧} + ث$

قاعدة (٣)

$$\int أ\ س^{ن}\ ء س = \frac{أ\ س^{ن+1}}{ن + 1} + ث$$

تمرين (٣): أوجد كل من:

(١) $\int ٣\ س^{٢}\ ء س$ (٢) $\int \frac{٣}{س^{٢}}\ ء س$

الحل

(١) $\int ٣\ س^{٢}\ ء س = \frac{٣\ س^{٣}}{٣} + ث = س^{٣} + ث$

(٢) $\int \frac{٣}{س^{٢}}$ ء س = $\int$ ٣ س$^{-٢}$ ء س = $\frac{٣ س^{-١}}{-١}$ + ث

= - ٣ س$^{-٣}$ + ث

قاعدة (٤)

$$\int هـ^{أس} \text{ ء س} = \frac{هـ^{أس}}{أ} + ث$$

<u>حيث ان:</u>

هـ : الدالة الأسية

تمرين (٤): أوجد كل من:

(١) $\int$ هـ^{٥س} ء س (٢) $\int$ ٨ هـ^{٨س} ء س

الحل

(١) $\int$ هـ^{٥س} ء س = $\frac{هـ^{٥س}}{٥}$ + ث

(٢) $\int$ ٨ هـ^{٨س} ء س = $\frac{٨ هـ^{٨س}}{٨}$ + ث = هـ^{٨س} + ث

قاعدة (٥)

$$\int هـ^{أس} \times أ \text{ ء س} = هـ^{أس} + ث$$

وهذا يعنى انه اذا كانت الدالة الاسية مضروبه فى تفاضل الأس فان ناتج عملية التكامل هو نفسه الدالة الأسية

تمرين (٥): أوجد كل من:

(١) $\int \text{هـ}^{\text{٥س٢ + ٣س + ٨}} \times (\text{١٠ س} + \text{٣})\ \text{ء س}$

(٢) $\int \text{هـ}^{\text{٤س٣ + ٨س − ٥}} \times (\text{١٢ س}^{\text{٢}} + \text{٨})\ \text{ء س}$

الحل

(١) $\int \text{هـ}^{\text{٥س٢ + ٣س + ٨}} \times (\text{١٠ س} + \text{٣})\ \text{ء س} = \text{هـ}^{\text{٥س٢ + ٣س + ٨}} + \text{ث}$

(٢) $\int \text{هـ}^{\text{٤س٣ + ٨س − ٥}} \times (\text{١٢ س٢} + \text{٨})\ \text{ء س} = \text{هـ}^{\text{٤س٣ + ٨س − ٥}} + \text{ث}$

قاعدة (٦)

$$\int \frac{\text{د}^{/}(\text{س})}{\text{د}(\text{س})}\ \text{ء س} = \text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{د}(\text{س}) + \text{ث}$$

وهذا يعنى انه اذا كانت البسط هو تفاضل الدالة فان ناتج عملية التكامل هو الدالة نفسها

تمرين (٦): أوجد كل من:

(١) $\int \frac{\text{١٥ س}^{\text{٢}} + \text{٤}}{\text{٥ س}^{\text{٣}} + \text{٤ س} + \text{٦}}\ \text{ء س}$

(٢) $\int \frac{\text{١٢ س}^{\text{٣}} + \text{٦ س} + \text{٥}}{\text{٣ س}^{\text{٤}} + \text{٣ س}^{\text{٢}} + \text{٥ س}}\ \text{ء س}$

الحل

(١) $\int \frac{\text{١٥ س}^{\text{٢}} + \text{٤}}{\text{٥ س}^{\text{٣}} + \text{٤ س} + \text{٦}}\ \text{ء س} = \text{٥ س}^{\text{٣}} + \text{٤ س} + \text{٦} + \text{ث}$

(٢) $\int \frac{١٢ س^{٣} + ٦ س + ٥}{٢ س^{٤} + ٣ س^{٢} + ٥ س}$ ء س = ٢ س^{٤} + ٣ س^{٢} + ٥ س + ث

قاعدة (٧)

$$\int (أ س + ب)^{ن} \text{ ء س } = \frac{(أ س + ب)^{ن+١}}{(ن + ١) \times أ} + ث$$

تمرين (٧)**:** أوجد كل من:

(١) $\int (٨ س + ٢)^{٣}$ ء س

(٢) $\int (٥ س + ٦)^{-٣}$ ء س

الحل

(١) $\int (٨ س + ٢)^{٣}$ ء س = $\frac{(٨ س + ٢)^{٤}}{٤ \times ٨}$ + ث

(٢) $\int (٥ س + ٦)^{-٣}$ ء س = $\frac{(٨ س + ٢)^{-٢}}{-٢ \times ٥}$ + ث

ثالثاً: إستخدام التكامل فى بعض التطبيقات الاقتصادية

(١) التكاليف الكلية = $\int$ دالة التكلفة الحدية ء س

(٢) الإيراد الكلي = $\int$ دالة الإيراد الحدي ء س

ونعلم مسبقا أن:

(٣) الربح = الإيراد الكلى - التكاليف الكلية

تمرين (٨): إذا كانت دالة التكلفة الحدية لإحدى السلع تمثلها المعادلة التالية: التكلفة الحدية = ٦ س^{٢} + ٥

حيث س: عدد الوحدات المنتجة. والمطلوب

(١) إيجاد دالة التكلفة الكلية مع العلم بأن التكلفة الثابتة تساوي ١٠٠ جنيه.

(٢) اوجد تكلفة انتاج ٥ وحدات.

الحل

(١) إيجاد دالة التكلفة الكلية

التكلفة الكلية = تكامل دالة التكلفة الحدية

التكلفة الكلية = $\int$ ٦ س^{٢} + ٥ ء س

التكلفة الكلية = $\frac{٦ \text{ س}^{٣}}{٣}$ + ٥ س + ث

التكلفة الكلية = ٢ س^{٣} + ٥ س + ث

وبما ان التكلفة الثابتة = ١٠٠ فانه يتم التعويض عن ث بالقيمة ١٠٠

التكلفة الكلية = ٢ س^{٣} + ٥ س + ١٠٠

(٢) إيجاد تكلفة إنتاج ٥٠ وحدة اى يتم التعويض بقيمة س = ٥

التكلفة الكلية = ٢ س^{٣} + ٥ س + ١٠٠

التكلفة الكلية = ٢ (٥)^{٣} + ٥ (٥) + ١٠٠ = ٣٧٥ جنية

تمرين (٩): إذا كانت دالة الايراد الحدى لإحدى السلع تمثلها المعادلة التالية:

الايراد الحدى = ٢ س + ١٢

حيث س: عدد الوحدات المنتجة. والمطلوب إيجاد دالة الايراد الكلى.

الحل

إيجاد دالة الايراد الكلى

الايراد الكلى = تكامل دالة الايراد الحدى

الايراد الكلى = ∫ ٢ س + ١٢ ء س

$$\text{الايراد الكلى} = \frac{٢\,س^{٢}}{٢} + ١٢\ س + ث$$

الايراد الكلى = $س^{٢}$ + ١٢ س + ث

فى دالة الايراد الحدى يتم اعتبار المقدار الثابت (ث) مساوياً للصفر لعدم وجود إيراد ثابت

الايراد الكلى = $س^{٢}$ + ١٢ س

تمرين (١٠): بإفتراض أن دالة الإيراد الحدي لإحدى السلع تمثلها المعادلة التالية:

الإيراد الحدي = ٢٠٠ – ٢ س

بينما كانت دالة التكلفة الحدية لنفس السلعة تمثلها المعادلة التالية:

التكلفة الحدية = ٣ $س^{٢}$ – ٢٠ س + ٢٠٠

حيث س: عدد الوحدات المنتجة من السلعة.

والمطلوب إيجاد كل من:

(١) دالة الإيراد الكلي.
(٢) دالة التكلفة الكلية بإفتراض أن التكلفة الثابتة تساوي ١٠٠ جنيه.
(٣) دالة الربح الصافي.

الحل

(١) دالة الإيراد الكلي

الإيراد الكلي = تكامل دالة الإيراد الحدي

الإيراد الكلي = ∫ ٢٠٠ – ٢ س ء س

$$\text{الايراد الكلى} = ٢٠٠\ \text{س} - \frac{٢\ \text{س}^{٢}}{٢}$$

الإيراد الكلي = ٢٠٠ س – $\text{س}^{٢}$

(٢) دالة التكلفة الكلية (ث = ١٠٠)

التكلفة الكلية = تكامل دالة التكلفة الحدية

التكلفة الكلية = ∫ ٣ $\text{س}^{٢}$ – ٢٠ س + ٢٠٠ ء س

$$\text{التكلفة الكلية} = \frac{٣\ \text{س}^{٣}}{٣} + \frac{٢٠\ \text{س}^{٢}}{٢} + ٢٠٠\ \text{س} + \text{ث}$$

التكلفة الكلية = $\text{س}^{٣}$ + ١٠ $\text{س}^{٢}$ + ٢٠٠ س + ث

وبما ان التكلفة الثابتة = ١٠٠ فانه يتم التعويض عن ث بالقيمة ١٠٠

التكلفة الكلية = $\text{س}^{٣}$ + ١٠ $\text{س}^{٢}$ + ٢٠٠ س + ١٠٠

(٣) دالة الربح الصافي

الربح = الإيراد الكلي − التكاليف الكلية

الربح = ٢٠٠ س − س^{٢} − (س^{٣} − ١٠ س^{٢} + ٢٠٠ س + ١٠٠)

الربح = ~~٢٠٠ س~~ − س^{٢} − س^{٣} + ١٠ س^{٢} − ~~٢٠٠ س~~ − ١٠٠

الربح = − س٣ + ٩ س^{٢} − ١٠٠

رابعاً: التكامل المحدود

بإفتراض أن لدينا التكامل الأتى للدالة د (س) فى الفترة من الحد الادنى (أ) الى الحد الأعلى (ب):

$$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د (س)} \;\; \text{ء س}$$

حيث أن:

ب : الحد الأعلى للتكامل.

أ : الحد الأدنى للتكامل

ويلاحظ ما يلى عند الحل:

١ − إيجاد التكامل طبقاً لقواعد التكامل السابقة مع وضع الناتج بين قوسين ثم نضع الحد الأعلى للتكامل أعلى القوس ونضع الحد الأدنى للتكامل أسفل القوس.

٢ − يتم التعويض عن (س) بالحد الأعلى للتكامل ثم نطرح منه نتيجة التعويض عن (س) بالحد الأدنى للتكامل.

تمرين (**١١**): أوجد

$$\int_{١}^{٣} س^{٣} \; ء س$$

الحل

١ – إيجاد التكامل للدالة $س^{٣}$ ثم نضع الناتج بين قوسين ووضع الناتج بين قوسين ثم نضع الحد الأعلى للتكامل (٣) أعلى القوس ونضع الحد الأدنى للتكامل (١) أسفل القوس

$$\int_{١}^{٣} س^{٣} \; ء س = \left(\frac{س^{٣ + ١}}{٣ + ١} + ث \right)_{١}^{٣}$$

٢ – يتم التعويض عن (س) بالحد الأعلى للتكامل (٣) ثم نطرح منه نتيجة التعويض عن (س) بالحد الأدنى للتكامل (١) .

$$\int_{١}^{٣} س^{٣} \; ء س = \left(\frac{(٣)^{٤}}{٤} + \cancel{ث} \right) - \left(\frac{(١)^{٤}}{٤} + \cancel{ث} \right)$$

$$= \frac{١٦}{٤} - \frac{١}{٤}$$

$$= \frac{١٥}{٤}$$

تمرين (١٢): أوجد

$$\int_{١}^{٢} \left(٣\,\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س} + ٥\right)\,\text{ء}\,\text{س}$$

الحل

$$\int_{١}^{٢} \left(٣\,\text{س}^{٢} + ٢\,\text{س} + ٥\right)\,\text{ء}\,\text{س} = \left[\frac{٣\,\text{س}^{٣}}{٣} + \frac{٢\,\text{س}^{٢}}{٢} + ٥\,\text{س} + \text{ث}\right]_{١}^{٢}$$

$$= \left((٢)^{٣} + (٢)^{٢} + ٥\,(٢) + \cancel{\text{ث}}\right) - \left((١)^{٣} + (١)^{٢} + ٥\,(١) + \cancel{\text{ث}}\right)$$

$$= ٢٢ - ٧ = ١٥$$

دكتور هشام عبد التواب مهران
قسم الاحصاء والرياضة والتأمين
جامعة عين شمس

تطبيقات

الإسم:...

الفرقة:..

إسم المادة:...

رقم الطالب:..

حالة الطالب:　　　　☐ مستجد　　　　☐ باقي

تطبيقات

الفصل الاول: الدوال الخطية

١) **أوجد ميل الخط المستقيم الذي يمر بكل من:**

أ- النقطتين (٣،٩) ، (٦ ، ١٢)

ب- النقطتين (– ٣ ، ٧) ، (٢، ١٠)

ج- النقطتين (– ٢ ، ٣) ، (-١٥ ، ١٤)

د- نقطة الأصل والنقطة (٥ ، ١٥)

٢) **أوجد الميل والجزء المقطوع من محور الصادات لكل من الدوال الخطية الآتية:**

أ- ص = ٦س + ١٠

ب-ص – ٨س = ١٠

ج- ٣ص – ١٥س + ١٢ = صفر

د- ٢ص + ١٠س +٤ = صفر

٣) **أوجد علاقة الخط المستقيم الذي يحقق الشروط الآتية:**

أ- الذى يمر بالنقطة النقطتين (٧ ، ١٥) وميله يساوى ٤

ب- الذي يمر بنقطة الأصل وبالنقطة (٨، ١٦)

ج- الذي ميله يساوى ٤ ويقطع المحور الصادي في ٦

٤) **حل المعادلات الآتية:**

٢س^{٢} + ٤ س – ٧٠ = صفر

س^{٢} – ٢ س – ٣٥ = صفر

٥) إذا كانت التكلفة الكلية لإنتاج ١٠٠ جهاز كمبيوتر هي ٥٠٠٠٠ جنيه في الأسبوع، بينما كانت التكلفة الكلية لإنتاج ١٥٠ جهاز كمبيوتر في الأسبوع هي ٦٥٠٠٠ جنيه. فباستخدام النموذج الخطى للتكلفة أوجد:

أ- التكلفة الثابتة

ب-التكلفة المتغيرة للوحدة

ج- التكلفة الكلية لإنتاج ٢٠٠ جهاز كمبيوتر في الأسبوع

٦) ينتج أحد المصانع نوع معين من الملابس الجاهزة وقد وجدت إدارة المصنع أن التكلفة الكلية لإنتاج ١٠٠ وحدة في اليوم هي ١٠٠٠٠ جنيه، بينما التكلفة لإنتاج ٢٠٠ وحدة في اليوم هي ١٥٠٠٠ جنيه ، المطلوب:

أ- إيجاد علاقة الخط المستقيم التي تمثل هذه الحالة.

ب-إيجاد التكلفة الكلية لإنتاج ٥٠٠ وحدة في اليوم.

٧) في مزرعة لإنتاج البرتقال كانت التكاليف الكلية لإنتاج ١٠٠ طن هي ١٠٠٠٠ جنيه، بينما كانت التكاليف الكلية لإنتاج ٢٠٠ طن هي ١٥٠٠٠ جنيه. المطلوب:

أ- إيجاد علاقة الخط المستقيم التي تمثل هذه الحالة.

ب-إيجاد التكلفة الثابتة والتكلفة المتغيرة للطن.

ج- إيجاد التكلفة الكلية لإنتاج ٤٠٠ طن.

تطبيقات

الفصل الثانى: المتباينات

(١) حل المتباينات الأتية ومثلها على خط الأعداد:

- ١٠س + ٢ > ٣٢
- ٢٠ س − ٣ < ٣٧
- ١١س − ٤ ≥ ٤٠

(٢) حل المتباينات الأتية ومثلها على خط الاعداد:

- ١٢س + ١٣ > -٣س − ١٧
- ٢٥ س +٢٧ < ١٩س -٩
- ٦س − ٢٠ ≥ ١٤س + ٢٥
- ٣س + ٤ ≤ -٥ س +٢٠

(٣) حل المتباينات الأتية ومثلها على خط الاعداد:

- ٨ > −٣س + ١٧ ≥ ٣٢
- ١٠ ≥ ٨ − ٦س ≥ ٢٦
- − ٢ ≥ ٥س − ٦س ≥ ٤٣
- س − ٨ ≤ ٢س − ٥ ≤ ٤ − س

(٤) حل المتباينات الأتية ومثلها على خط الاعداد:

- ٦ (س− ٢) + ١٠ ≥ (س− ٢) + ٣٢
- ١(٣س − ١٢) + ٦ > − ٢ (س− ٤)

(٥) حل المتباينات الآتية ومثلها على خط الاعداد:

| ٤ س − ٨ | < ١٦

| ٥ + ٢ س | ≤ ٢٥

(٦) إذا كان سعر بيع الوحدة الواحدة من نوع معين من الألبان يساوى ٨ جنيه، وبـافتراض أن التكلفـة الثابتـة للمصـنع تسـاوى ٢٥٠٠ جنيـه في الشـهر، والتكلفة المتغيرة لإنتاج وحدة واحدة من هذه السلعة تساوى ٣ جنيهات فأوجـد حجـم الوحـدات التـي ينبغـي أن تنـتج وتبـاع في الشـهر حتـى يمكـن تحقيق ربحا صافيا.

(٧) بافتراض أن معادلة التكاليف الكلية في الشهر لإنتاج (س) وحدة من سلعة ما هي (٥٠٠٠ + ١٥٠س) ، وأن سعر بيع الوحدة من هذه السلعة يساوى ٩٠٠ جنيهـا ، فأوجـد حجـم الوحـدات (س) التـي ينبغـي أن تنـتج وتبـاع في الشـهر حتـى يمكـن تحقيـق ربحـا صـافيا قـدره ٢٥٠٠ جنيهـا على الأقـل في الشهر.

تطبيقات

الفصل الثالث: البرمجة الخطية

(١) أوجد حل للبرنامج الخطى التالى :

دالة الهدف تعظيم = ٤٠ س + ٥٠ ص

بشرط :

س + ٢ ص ≥ ١٢

٥ س + ٤ ص ≥ ٣٠

قيود عدم السلبية : س ≤ صفر ، ص ≤ صفر

(٢) أوجد حل للبرنامج الخطى التالى :

دالة الهدف تخفيض = ٤٠ س + ٣٥ ص

بشرط :

٢٠ س + ٨ ص ≤ ١٨٠

١٦ س + ١٤ ص ≤ ٢٢٤

قيود عدم السلبية : س ≤ صفر ، ص ≤ صفر

تطبيقات

الفصل الرابع: الفئات

إذا كان لديك الفئات التالية:

س = { ١ ، ٣ ، ٥ }　　ص = { ٢ ، ٤ , ٦ }　　ع = { ١ ، ٢ ، ٧ , ٨ }

أوجد

١- س/　　٢- ص/　　٣- ع/

٤- (س ∩ ص)　　٥- (س ∩ ع)　　٦- (ص ∩ ع)

٧- (س U ص)　　٨- (س U ع)　　٩- (ص U ع)

١٠- (س ∩ ص)/　　١١- (س U ص)/　　١٢- (س – ع)

١٣- (ع – س)　　١٤- (ص – س)

تطبيقات

الفصل الخامس: المحددات

(١): أوجد مفكوك المحددات التالية:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 8 & -4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

(٢): أوجد مفكوك المحددات التالية:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 9 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

الحل = -٣٣   الحل = ٩٦   الحل = - ٧٠

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & 9 \end{vmatrix}$$

الحل = ١٦   الحل = ٦٠   الحل = - ٦٠

(٣): أذكر ثلاثة من خصائص المحددات مع ذكر مثال من عندك

(٤): إثبت باستخدام خصائص المحددات أن قيمة المحددات التالية تساوى صفر

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & -9 \\ 4 & 7 & 12 \end{vmatrix}$$

(٥) حل المعادلات الخطية الأتيه بإستخدام المحددات

٧ س - ١٧ = -٣ ص

٩ س = ١٦ + ٢ ص

(٦): حل المعادلات الخطية الأتيه بإستخدام المحددات

٥ س + ٤ ص = ٢٢

٢ س – ٣ ص = -٥

(٧): حل المعادلات الخطية الأتيه بإستخدام المحددات

٤ س - ٢ ص = ٢

٣ س + ص = ١٤

تطبيقات

الفصل السادس: المصفوفات

(١) عرف كل من:

(١) المصفوفة　　(٢) المصفوفة المربعة　　(٣) المصفوفة المتماثلة

(٤) المتجه　　(٥) مصفوفة الوحدة　　(٦) المصفوفة القطرية

(٧) المصفوفة الصفرية

(٢) إذا كان لديك المصفوفات التالية:

أ = $\begin{bmatrix} ٩ & ٨ & ١ \\ ٥ & ١٠ & -٢ \\ ٤ & ٦ & -٣ \end{bmatrix}$　٣ × ٣

ب = $\begin{bmatrix} -٣ & ١٢ & ١٣ \\ -٥ & ١٠ & ٩ \\ ٨ & ١٩ & ٦ \end{bmatrix}$　٣ × ٣

جـ = $\begin{bmatrix} ٢ & ٥ & ٩ \\ ٦ & ٧ & ٨ \end{bmatrix}$　٢ × ٣

ص = $\begin{bmatrix} ٨ & ٩ \\ -٥ & ٤ \\ -٦ & ٧ \end{bmatrix}$　٣ × ٢

أوجد:

(١) أ + ب　　(٢) أ – ب　　(٣) ب – ص

(٤) -٢ ب　　(٥) جـ × ص　　(٦) ص × جـ

(٧) ص/　　(٨) أ/　　(٩) ٣ × أ/

(١٠) أ × ب　　(١١) ب × ص　　(١٢) ص × ب

تطبيقات

الفصل السابع: التفاضل

(١) أوجد المعامل التفاضلي الأول لكل من الدوال الآتية:

أ – ص = ٨س^{٢} + ٩ س^{٢} + ٦س -١٠

ب – ص = (٤س^{٢} + ٦ س) + (٥س +٨)

ج – ص = هـ$^{٥س^{٣}+٦س^{٢}+٨}$

د– ص = لو (٦س^{٢} - ٨ س +١٠)

هـ – ص = $\frac{\text{٢س}^{٢}+٨}{\text{٥ س}^{٢}+\text{٦س}+١٠}$

(٢) أوجد النهايات العظمي أو الصغرى لكل الدوال الآتية:

أ – ص = -٢س^{٢} + ٤٠ س + ١٠٠

ب – ص = ٢س^{٢} - ٢٠ س + ١٨

ج – ص = ٣س^{٢} - ١٢ س + ٨

د– ص –٠,٢س^{٢} + ١٢ س - ١٠٠

(٣) إذا كانت دالة التكلفة الكلية (ك) لإحدى السلع تمثلها المعادلة الآتية:

ك = س^{٢} -٦س^{٢} + ١٤ س

حيث: س: عدد الوحدات المنتجة.

المطلوب إيجاد كل من:

(أ) دالة التكلفة الحدية.

(ب) دالة الإيراد الحدي .

(٤) إذا كانت معادلة الايراد الكلى تمثلها المعادلة الآتية:

ي = ٣٦ س – ٤س٢

بينما كانت معادلة التكلفة الكلية لهذه السلعة هي:

ك = ٢س٢ +٥

ما هي عدد الوحدات المنتجة التي تحقق أعظم ربح ممكن؟

(٥) إذا كانــت معادلــة الايــراد الكلــى ى = ٣٠ س ، فــإذا كانــت معادلــة التكاليف الكلية للإنتاج هي:

ك = ٢٠ س + ٠,٠٠١ س٢

ما هـو حجـم الإنتـاج (س) الـذي يحقـق أعظـم ربـح ممكـن؟ ومـا مقـدار هـذا الربح؟

(٦) إذا كانت معادلة الايراد الكلى تمثلها المعادلة الآتية:

ى = ٢٠٠ س – ٠,٥ س٢

بينما كانت معادلة التكلفة الكلية لهذه السلعة هي:

ك = ٠,٥ س ٢ + ٨س +٤٠٠

ما هـو حجـم الإنتـاج (س) الـذي يحقـق أعظـم ربـح ممكـن؟ ومـا مقـدار هـذا الربح؟

(٧) مصنع تليفزيون يبيع (س) جهاز في الأسبوع فاذا كانت معادلة الايراد الكلى هى:

ى = س٥٠٠ – ٧ س٢

فإذا علمت أن التكاليف الكلية لهذه الأجهزة تمثلها المعادلة الآتية:

ك= ٧٠٠ +٣٦ س + ٠,٢٥ س٢

ما هو حجم الإنتاج (س) الذي يحقق أعظم ربح ممكن؟ وما مقدار هذا الربح؟

(٨) إذا كانت العلاقة بين الكمية المنتجة (س) والتكلفة الكلية (ك) تمثلها المعادلة الآتية:

$$ك = ١٠٠ - ٢س + ٠,٠١ س^{٢}$$

أوجد حجم الإنتاج (س) الذي يجعل التكلفة الكلية أقل ما يمكن

تطبيقات

الفصل الثامن: التكامل

أوجد كل من:

(١) $\int$ ٥ ء س   (٢) $\int$ ١٢ ء س   (٣) $\int$ -٢ ء س

(٤) $\int$ س^{٦} ء س   (٥) $\int$ س^{٩} ء س   (٦) $\int$ س$^{-٤}$ ء س

(٧) $\int$ ٤ س^{٣} ء س   (٨) $\int$ هـ$^{١٢ س}$ ء س   (٩) $\int$ ٩ هـ$^{٩ س}$ ء س

(١٠) $\int$ هـ$^{٥ س٢ + ٥ س + ٨}$ × (١٠ س + ٥) ء س

(١١) $\int$ هـ$^{٣ س٣ + ٢ س – ٥}$ × (٩ س^{٢} + ٢) ء س

(١٢) $\int \dfrac{١٢ س^{٢} + ٦}{٤ س^{٣} + ٦ س + ٢}$ ء س

(١٣) $\int \dfrac{١٥ س^{٣} + ٨ س + ٣}{٥ س^{٤} + ٤ س^{٢} + ٣ س}$ ء س

(١٤) $\int$ (٩ س + ٨)^{٥} ء س

(١٥) $\int$ (١٠ س + ٦)$^{-٣}$ ء س

(١٦) بإفتراض أن دالة الإيراد الحدي لإحدى السلع تمثلها المعادلة التالية:

الإيراد الحدي = ١٠٠ – ١٠ س

بينما كانت دالة التكلفة الحدية لنفس السلعة تمثلها المعادلة التالية:

التكلفة الحدية = ٢,٥ س^{٢} – ٢٠ س + ١٠٠

حيث س: عدد الوحدات المنتجة من السلعة.

والمطلوب إيجاد كل من:

(أ) دالة الإيراد الكلي.

(ب) دالة التكلفة الكلية بإفتراض أن التكلفة الثابتة تساوي ١٠٠ ج.

(ج) دالة الربح الصافي.

(١٧) $\int_{١}^{٢}$ ٤ س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٣ ء س