الإحصاء التطبيقي وبحوث العمليات
بالتطبيق علي حزم
[Minitab - TORA]

إعداد

د / ياسر محمد عامر

الاستاذ المساعد بقسم الرياضة والإحصاءو التأمين

معاهد القاهرة العليا بالمقطم

مقدمة

يهدف هذا الكتاب إلى عرض الموضوعات الرئيسية في الإحصاء التطبيقي (الاستدلالي) و هي نظرية العينات ، التقدير ، اختبارات الفروض و مقارنة عينتين وذلك لما تمثلة تلك الموضوعات من أهمية في مجال تحليل البيانات و اتخاذ القرارات كما يقدم هذا الكتاب تطبيقات علي تلك الموضوعات بأستخدام أحد أهم برامج التحليل الاحصائي و هو برنامج **MINITAB** مع بيان الخطوات التوضيحية لأخال البيانات و تحليلها من خلال البرنامج بشئ من التفصيل في فصل كامل .

أيضاً في النصف الثاني من هذا الكتاب نقوم بعرض مجموعة من الموضوعات الخاصة بمجال بحوث العمليات حيث نتعرض لنشأة هذا العلم و فروعة في أحد الفصول ثم نتطرق إلي أهم نماذج بحوث العمليات المؤسس لذلك العلم وهو نموذج البرمجة الخطية حيث نأخذ هذا النموذج بشئ من التفصيل مع بيان كيفية الحل البياني لهذا النموذج وأيضاً نعرض بالتفصيل طريقة السمبلكس لحل نموذج البرمجة الخطية جبرياً ثم نتطرق بعد ذلك لنموذج النقل والتوزيع واخيرأ نستعرض نموذج تقييم و مراجعة أداء البرامج [تحليل شبكات الاعمال] ، يقدم ايضاً هذا الكتاب تطبيقات علي موضوعات بحوث العمليات بأستخدام برنامج **TORA** مع بيان الخطوات التوضيحية لأدخال النماذج و تحليلها وصولاً للوضع الامثل من خلال البرنامج .

المؤلف

المحـتـوي

الفصل الاول
مبادئ نظرية العينات

مقدمة

تهتم نظرية العينات بدراسة العلاقة بين المجتمع والعينات المسحوبة منه فيما يسمى بالاستدلال الإحصائي ، statistical inference. هناك عدة طرق لأخذ العينات من المجتمع لاستخدامها في الاستدلال الإحصائي ومن أشهر هذه الطرق هي العينة العشوائية وهي العينة التي تكون لكل مفرده من مفردات المجتمع نفس فرصة الاختيار في العيينة. فمثلاً نستعين بعينه مسحوبة من المجتمع لتقدير معالم هذا المجتمع مثل متوسطه أو تباينة أو غير ذلك. أو لطاء عينه من المرضى بارتفاع الضغط، مثلاً دواء معين ثم قياس ضغطهم قبل وبعد تناولهم لهذا الدواء لمعرفة ما إذا كان هذا الدواء مفيد في خفض الضغط أم لا.

أي مجموعات من المفردات تشترك في صفه أصفات وتكون موضوع دراسة أو بحث فإن هذه المجموعة يطلق عليها إحصائيا مجتمع الدراسة (أو اختصاراً المجتمع Population). والمجتمع قد يكون مجموعة ما من البشر أو أشجار أنواع معينه من الفاكهة أو الحيوانات الزراعية أو إنتاج دولة ما لسلع معينه خلال فترة زمنية محدده...الخ.

والمجتمع قد يكون محدوداً إذا كان يمكن حصر عدد أفراده مثل سكان مدينة ما أو طلاب مرحلة تعليمية معينة ، وقد يكون المجتمع غير محدود (لانهائي) إذا كان لا يمكن حصر عدد أفراده مثل النجوم والكواكب أو الكائنات الحية بمياه المحيطات والأنهار وعند دراسة صفة ما أو صفات معينه لمجتمع ما ، فإن البيانات الإحصائية عن تلك الصفة أو الصفات تجمع بأحد أسلوبين

أولاً : أسلوب الحصر الشامل (census) وفيه تجمع البيانات عن كل مفرده من مفردات المجتمع، وهذا الأسلوب يتطلب وفرة في الوقت والمال والمجهود الفني وتزداد هذه المتطلبات وتتضاعف كلما ازداد حجم المجتمع (عدد أفراد المجتمع). وهذا الأسلوب لا يتبع عادة إلا في حالة التعدادات التي تجريها الدول وتدعمها بإمكانيات ضخمه مثل تعدادات السكان والتعدادات الصناعية والتعدادات الزراعية.

الثاني: أسلوب المعاينة (Sampling method) وفيه يتم جمع البيانات عن جزء من مفردات المجتمع يختار بطريقة أو بأخرى ويطلق عليه عينه (Sample) ثم بعد ذلك يتم تعميم نتائج الدراسة على المجتمع بأكمله. أي أن إسلوب المعينة يقصد به دراسة خصائص المجتمع من خلال دراسة عينه مسحوبة منه ، ونجاح هذا الإسلوب يعتمد على أن تحمل العينة أقصى درجة من دقة التمثيل للمجتمع المسحوبة منه.

من الأفضل في بعض الحالات الحصول على معلومات دقيقة عن طريق التعداد التام أو الحصر الشامل لجميع عناصر المجتمع، لكن لاستخدام أسلوب المعاينة فوائد جمة مقارنة بالتعداد الشامل يرد بيانها في الفقرة التالية.

بعض مزايا أسلوب المعاينة

يتميز أسلوب المعاينة عن أسلوب الحصر الشامل بمزايا عدديه منها:

1يؤدي استخدام العينات العشوائية إلى خفض تكاليف الدراسات الميدانية بسبب صغر حجم العينة بالنسبة إلى حجم المجتمع وهو ما يؤدي إلى تخفيض الأعباء الإدارية والفنية التي تتطلبها أي دراسة ميدانية.

2يتحقق وفر واضح في الوقت الذي ينفق في دراسة ميدانية على أساس عينة بدلاً من الحصر الشامل وتتضح أهمية الوقت عندما نقوم بدراسة ظاهرة تتغير بمرور الوقت ، وعينة قد يترتب على دراسة تلك الظاهرة في المجتمع كله بجمع البيانات من جميع مفردات المجتمع أن يمر وقت بديل فتكون البيانات والنتائج وقت ظهورها غير مطابقة لواقع المجتمع وتصبح النتائج ذات قيمه محدودة بعد أن فقدت عنصر المطابقة مع واقع الظاهرة وتوزيعها الحالي

لمجتمع ، والتعدادات الدورية للسكان وبسبب ضخامة حجم العمل بها تستغرق وقتاً طويلاً حتى تصبح نتائجها جاهزة ومنشورة وقد يطول هذا الوقت إلى أكثر من ثلاث أو أربع سنوات حتى مع استخدام أحدث أجهزة الحاسبات الأليه الضخمة ، ويكون على الباحثين مستخدمي هذه النتائج مراعاة الوقت الذي ينقض بين تاريخ إجراء التعداد وتاريخ نشر نتائجه وتعديل هذه النتائج في حدود ذلك .. وهذا دفع الكثير من الدول إلى تعزيز نتائج التعدادات الدورية للسكان بنتائج تعدادات تجري بين كل تعدادين متتاليين على أساس العينة.

3في المجتمعات غير المحدودة (اللانهائية) مثل مجتمع الكائنات الحية في البحار والمحيطات لا يمكن أن تتم الدراسة على أساس الحصر الشامل ولكن لابد وأن تتم الدراسة بأسلوب المعاينة.

4أيضاً هناك بعض الاختبارات لابد وأن تتم بأسلوب المعاينة لأن إجراء مثل هذه الاختبارات على أساس الحصر الشامل يؤدي إلى تلف المادة المختبرة أو هلاكها.. فاختبار صلاحية شحنه من المفرقعات مثلاً لابد وأن يتم على أساس العينة وبالمثل تحليل دم المرضى يتم على أساس عينه.

أقسام العينات

تنقسم العينات عادة إلى قسمين رئيسين وهما عينات عشوائية وعينات غير عشوائية، وفيما يلي تفصيل لكل قسم منها.

1- العينات العشوائية

هي تلك العينات التي يتم اختيار مفرداتها حسب خطه إحصائية لا يكون فيها للباحث أو لمفردات العينة دخل في اختيار أي مفرده فيها ، حيث يتم الاختيار باستخدام أساليب معينة تلعب الصدفة خلالها الدور الأول في اختيار المفردة ولكن بشرط أن يتحقق لجميع المفردات احتمال ثابت ومحدد للاختيار. والعينات العشوائية إذا ما تم

اختيارها بالطريقة العلمية السليمة والمناسبة يمكن أن تكفل درجه عالية من دقة التمثيل للمجتمعات المسحوبة منها لذلك فهي الوسيلة الأساسية في حالة البحوث العلمية الدقيقة .. من أهم أنواع العينات العشوائية مايلي.

(أ) العينة العشوائية البسيطة: Simple random sample

ويلجأ إليها الباحث في حالة ما إذا كان مجتمع الدراسة ليس كبيراً ويحمل قدراً من التجانس بين المفردات للصفة أو الصفات موضع الدراسة. والعينة العشوائية البسيطة تستغل فرص متكافئة لمفردات المجتمع للدخول في العينة ولكن المفردات التي تدخل في العينة تكون عن طريق الصدفة البحتة. والاختيار العشوائي يتم يدوياً عن طريق بطاقات متماثلة في الحجم واللون أو عن طريق جداول الأعداد العشوائية أو عن طريق الحاسب الآلي. ولكي يتحقق ذلك فإن الأمر يتطلب تحديد مفردات المجتمع تحديداً كاملاً ويكون هذا التحديد على شكل قائمة (أو خريطة)تضم كل مفردات المجتمع وهذه القائمة تسمى الإطار (Frame) ولا يجوز الاختيار العشوائي إلا من المفردات التي يضمها الإطار.

(ب) العينة المنتظمة: Systematic sample

اختيار هذه العينة يتطلب وجود إطار للمجتمع كما في حالة العينة العشوائية البسيطة بحيث يعطى لكل مفرده من مفردات المجتمع رقماً متسلسلاً داخل الإطار ، ثم نختار مفردات العينة من الإطار بحيث يكون الرقم المتسلسل لكل مفردة يبعد بعداً ثابتاً منتظماً عن رقم المفردة السابقة لها وكذلك رقم المفردة اللاحقة لها.فمثلاً إذا كان لدينا مجتمعاً حجمه 2000 مفرده ونريد اختيار عينه منتظمة حجمها 100 مفرده فإننا نقسم الإطار إلى فترات منتظمة طول كل فترة = $\frac{2000}{100}=20$ مفردة ومن داخل مفردات الفترة الأولى (1 – 20) يختار مفرده واحدة

عشوائياً ولتكن رقم 14 مثلاً وبناء على رقم تلك المفردة يتحدد باقي مفردات العينة المنتظمة فتكون هي المفردات ذات الأرقام 34 ، 54 ، .... ، 1974، 1994.

والعينة المنتظمة كثيرة الاستعمال في التطبيقات العملية لقلة تكاليفها وقلة الأخطاء التي ترتكب في اختيار مفردات العينة فضلاً عن سهولة إجرائها. ولكن أهم عيوب المعاينة المنتظمة هو عدم صلاحيتها إذا ما وجدت علاقة دورية مع ترتيب العناصر في القائمة وكان طول الفترة بين عناصر العينة مساوياً لطول الدورة أو إحدى مضاعفاتها.

(جـ) العينة العشوائية الطبقية: Stratified random sample

ويلجأ إليها الباحث في حالة ما إذا كان مجتمع الدراسة واضحاً به فئات (طبقات) بحيث أن التجانس أو التقارب داخل كل طبقة من طبقات مجتمع الدراسة أكبر من التجانس داخل المجتمع ككل (أي أن التشتت داخل المجتمع ككل أكبر من التشتت داخل كل فئة من فئاته على حده). في هذه الحالة يجب على الباحث مراعاة أن الطبقة داخل العينة بنفس نسبة وجودها داخل المجتمع (وأحياناً يوضع في الاعتبار عناصر أخرى مثل التشتت داخل الطبقة أو عنصر التكلفة لجمع البيانات عن الطبقة). بعد أن يتم تحديد عدد المفردات التي يجب سحبها من كل طبقة للدخول في العينة فإن هذه المفردات يتم سحبها عشوائياً من داخل الطبقة ومجموع هذه المفر دات تكون العينة الطبقية العشوائية.

في هذه الحالة نجد أن المجتمع لا يتصف بالتجانس و لكن يتصف بوجود فئات مميزة داخله طبقاً لبعض الخصائص فنجد إن المجتمع يقسم إلي طبقات كل طبقه تمثل فئة من فئات المجتمع حيث

حجم المجتمع N حجم الطبقة Nj و نجد أن

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + ...$$

وبالتالي فإن حجم العينة n يساوى

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + ...$$

حيث : $n_1, n_2, n_3, \ldots$ تمثل المفردات المختارة من كل طبقه داخل العينة

وتحسب مفردات كل طبقه بإحدى الطرق الآتية :-

1) طريقة السحب المتساوي

في هذه الطريقة عدد مفردات كل طبقة يساوي الأخرى و تحسب كالتالي

$$n_j = n_1 = n_2 = \ldots = \frac{n}{k}$$

حيث **k** عدد طبقات المجتمع

و من عيوب هذه الطريقة

- أنها لا تأخذ في الاعتبار حجم الطبقات في المجتمع و نسبة كل طبقة
- لا تراعي اختلاف التشتت داخل كل طبقة عن الاخري و نسبة كل طبقة

2) طريقة التوزيع المتناسب

في هذه الطريقة تكون نسبة كل طبقة في المجتمع هي نفس نسبتها في العينة و هذه الطريقة هى الأدق

$$\text{مفردات الطبقة في العينة} = \frac{\text{حجم الطبقة}}{\text{حجم المجتمع}} \times \text{حجم العينة}$$

ومن عيوب هذه الطريقة أنها لم تأخذ في الاعتبار تشتت المتغير داخل كل طبقة من الطبقات

مثـــــــال

مجتمع مكون من ثلاث طبقات

الطبقة الأولى (N_1) = **150** , الطبقة الثانية (N_2) = **250** , الطبقة الثالثة (N_3) = **600**

أوجد مفردات كل طبقة في عينة مقدارها **75** مفردة

1) باستخدام التوزيع المتساوي **2)** باستخدام التوزيع المتناسب

الحـــــل

$$N = N_1 + N_2 + N_3$$
$$= 150 + 250 + 600 = 1000$$

عدد الطبقات **k =3**

1) في حالة التوزيع المتساوي

$$n_1 = n_2 = n_3 = \frac{n}{k} = \frac{75}{3} = 25$$

25وبذلك يكون حجم مفردات كل طبقة في العينة هو

2) في حالة التوزيع المتناسب

مفردات الطبقة في العينة = $\dfrac{\text{حجم الطبقة}}{\text{حجم المجتمع}}$ × حجم العينة

$$n_1 = \frac{N_1}{N} \times n = \frac{150}{1000} \times 75 = 11$$

$$n_2 = \frac{N_2}{N} \times n = \frac{250}{1000} \times 75 = 19$$

$$n_3 = \frac{N_3}{N} \times n = \frac{600}{1000} \times 75 = 45$$

ونلاحظ أن

$$n = n_1 + n_2 + n_3 = 11 + 19 + 45 = 75$$

3) طريقة التوزيع الأمثل

تعتمد هذه الطريقة علي اخذ التجانس خلال طبقات العينة كعامل في الاختيار وذلك لكى تعالج الشتت في كل طبقة و ذلك عن طريق إدخال الانحراف المعياري لكل طبقة كالتالي

$$n_j = \frac{N_j \times \sigma_j}{\sum_{j=1}^{k} N_j \times \sigma_j} \times n$$

حيث σ_j الانحراف المعياري للطبقة رقم **j**

فمثلا σ_1 الانحراف المعياري للطبقة رقم **1** , σ_2 الانحراف المعياري للطبقة رقم **2** و هكذا

من المثال السابق بفرض أن

الانحراف المعياري للطبقة الأولى **2** و للطبقة الثانية**1** و للطبقة الثالثة **3** و المطلوب استخدام طريقة التوزيع الأمثل لتحديد حجم كل طبقة في العينة

$$\sigma_1 = 2 \quad , \quad \sigma_2 = 1 \quad , \quad \sigma_3 = 3$$

لتبسيط الحل نصمم الجدول التالي

N_j	σ_j	$N_j \times \sigma_j$
150	**2**	$150 \times 2 = 300$
250	**1**	$250 \times 1 = 250$
600	**3**	$600 \times 3 = 1800$
المجموع		**2350**

و بالتالي يمكن حساب الطبقات بسهولة كالتالي

$$n_1 = \frac{300}{2350} \times 75 = 9.57 \approx 10$$

$$n_2 = \frac{250}{2350} \times 75 = 7.97 \approx 8$$

$$n_3 = \frac{1800}{2350} \times 75 = 57.44 \approx 57$$

(د) العينة متعددة المراحل أو العنقودية: clustered sample

يلجأ إليها الباحث عندما يكون مجتمع الدراسة كبير جداً ومتناثراً على مساحات شاسعة تكلف الكثير من الوقت والجهد في التنقل بينها عند جمع البيانات، أيضاً في حالة عدم وجود إطار يضم جميع مفردات المجتمع فيستحيل الاختيار العشوائي مباشر من المجتمع. لهذا يلجأ الباحث إلى أخذ العينة على مراحل متعددة متتالية. في المرحلة الأولى يتم تقسيم المجتمع إلى عدد محدد من وحدات المعاينة الكبيرة الحجم ومنها يختار بعضها عشوائياً ثم يتلو ذلك كمرحلة ثانية تقسيم الوحدات المختارة عشوائياً من المرحلة الأولى إلى وحدات أقل منها في الحجم ثم يختار بعضها عشوائياً ..

وهكذا تتابع مراحل التقسيم والاختيار العشوائي ، وعدد هذه المراحل ليس ثابت بل يتوقف على طبيعة مجتمع الدراسة وإمكانيات الباحث .. في المرحلة الأخيرة يصل الباحث إلى وحدات المعاينة التي سيجمع عنها بيانات البحث ويطلق عليها وحدات المعاينة الأولية.

2- العينات غير العشوائية:

هي تلك العينات التي لا تكفل لجميع مفردات المجتمع احتمال ثابت ومحدد للاختيار، وغالباً يتدخل الباحث في عملية الاختيار بصورة أو بأخرى ... ومن أهم أنواع العينات غير العشوائية:

(أ) العينة العمدية أو المقصودة: Purposive sample

يلجأ الباحث إلى هذه الطريقة فيما إذا كان مجتمع الدراسة كبير جداً وكانت إمكانياته لا تسمح له إلا بدراسة عينة حجمها صغير جداً بالنسبة لمجتمع الدراسة، في هذه الحالة يتعمد الباحث اختيار مفردات معينة كعينة لمجتمع الدراسة يرى بخبرته السابقة أن هذه العينة يمكن أن تعطي تمثيلاً مقبولاً لمجتمع الدراسة.

مثلاً إذا أراد باحث دراسة خصائص اقتصادية أو اجتماعية معينه عن ريف دولة ما ، وكانت إمكانياته المالية والإدارية لا تسمح له بعينة سوى سكان قرية واحدة ، فإنه في هذه الحالة إذا ما تم اختيار القرية عشوائياً من بين آلاف القرى بتلك الدولة فإن الصدفة قد تأتي بقرية بعيدة في خصائصها (من حيث الظاهرة موضوع الدراسة) عن

خصائص معظم قرى تلك الدولة ... كأن تأتي بالصدفة قرية ساحلية معظم سكانها من الصيادين أو قرية قريبة من مشروع صناعي ضخم يستوعب في قواه العاملة معظم سكانها.. هذه القرية أو تلك قد يأخذ النمط المعيشي لسكناها طابعاً خاصاً –نابعاً عن ظروفها الخاصة –بعيداً عن النمط المعيشي المعتاد لبقية القرى، لذلك فأي منها لا يمكن أن يعطي تمثيلاً مقبولا لريف تلك الدولة. لهذا فإن الباحث وعلى ضوء خبراته السابقة يتعمد اختيار قرية معينة يرى أنها – من وجهة نظره الشخصية- يمكن أن تمثل الريف. وهذه الطريقة غير علميه وغالباً يتم اللجوء إليها في حالة البحوث التمهيدية.

(ب) العينة الحصصيه: Quota sample

وهي نوع خاص من العينات غير العشوائية وتستخدم كثيراً في معاينة الرأي العام (على سبيل المثال عمليات استطلاعية الرأي العام التي يقوم بها معهد جالوب قبل إجراء انتخابات الرئاسة في الولايات المتحدة الأمريكية)... في هذه الطريقةيقسم المجتمع موضوع الدراسة إلى طبقات بالنسبة إلى صفات أو خصائص معينة ويتم العمل على تمثيل كل طبقة منها في العينة بنسبة وجودها في المجتمع الأصلي (وعلى سبيل المثال في حالة دراسة الدخل لمنطقة ما ورؤى أن يكون حجم العينة المطلوبة 100 فرد مثلاً عندما يريد الباحث أن يقوم جامعوا البيانات بالحصول على البيانات من 20 موظفاً، 45 من العمال الحرفيين ، 35 من ذوي الأعمال الحرة .. وتترك الحرية لجامعي البيانات في اختيار الأفراد المطلوبة فيها حدود المواصفات الموضوعة لكل طبقة من الطبقات المذكورة.

واضح أنه رغماً من أن هذه الطريقة في ظاهرها مماثلة للعينة الطبقية العشوائية.. إلا أنه في الحالة الأخيرة (العينة الطبقية العشوائية) يكون اختيار المفردات عشوائياً من داخل كل طبقة ولا يترك لجامع البيانات حرية اختيار المفردات من كل طبقة والذي قد يترتب عليه تميزاً كبيراً .

عموماً .. يلجأ الباحث إلى العينة الحصصيه إذا كان من المرغوب فيها اظهار النتائج في وقت قصير مع التغاضي عن توافر درجة دقة عالية بتلك النتائج.

أخطاء البيانات الإحصائية

تتعرض البيانات الإحصائية التي يتم جمعها إلى نوعين من الأخطاء:

1- خطأ التميز

وهو ينتج عن مصادر متعددة، منها أخطاء في تصميم البحث أو التجربة أو أخطاء فنيه أثناء جمع البيانات أو خلال العمليات الحسابية التي تتم على البيانات المتجمعة.. أخطاء التميز تزداد بازدياد الفروق بين الإمكانيات (المادية والفنية) اللازم توافرها لضمان أقصى درجة دقة ممكنه وبين الإمكانيات الفعلية المتاحة للباحث.

أخطاء التميز قد توجد في البيانات التي يتم جمعها بأسلوب الحصر الشامل وقد توجد أيضاً في البيانات التي يتم جمعها بأسلوب المعاينة، ولكنها إن وجدت فهي غالباً أكبر في الحالة الأولى (الحصر الشامل) مما هي عليه في الحالة الثانية (المعاينة) باعتبار أن حجم العمل في تلك الحالة يكون أقل وبالتالي قد يسهل توفير الإمكانيات اللازمة وتجنب الأخطاء الفنية.

2- خطأ المعاينة العشوائية أو خطأ الصدفة

وهو الخطأ الناتج عن فروق الصدفة بين مفردات المجتمع التي دخلت العينة وبين تلك المفر دات التي لم تشأ الصدفة أن تدخل العينة.. وخطأ الصدفة يمكن تقليل قيمته إذا ما تم اختيار العينة بالطريقة المناسبة وإذا ماكان حجم العينة مناسباً لحجم المجتمع وخصائصه.

المعالم والإحصاءات

المقاييس الإحصائية التي تحسب من بيانات مجتمع الدراسة بأكمله يطلق عليها معالم المجتمع (Parameters of population)، أما المقاييس الإحصائية التي تحسب من بيانات عينه مسحوبة من مجتمع الدراسة فيطلق عليها إحصاءات (Statistics) ويعتبر كل إحصاء منها بمثابة تقدير أو قيمه تقديرية لمعلمة المجتمع المناظر، فيكون المتوسط الحسابي المحسوب من بيانات العينة تقدير لمعلمة المجتمع المناظرة وهي المتوسط الحسابي المسحوب منه هذه العينة وهكذا.. ويجب ألا يغيب عن الأذهان بأن حساب قيمة المتوسط الحسابي من بيانات العينة ليس هدفاً في حد ذاته ولكن وسيلة للتعرف على المتوسط الحسابي للمجتمع موضوع الدراسة.. وهكذا بالحال بالنسبة لباقي المقاييس الإحصائية التي تحسب من العينة.

للتفرقة بين المعالم والإحصاءات يجب أن نرمز لكل منها برموز تختلف عن رموز الأخرى، على سبيل المثال يرمز للمتوسط الحسابي للمجتمع بالرمز μ بينما يرمز للمتوسط الحسابي للعينة بالرمز $\bar{x}$ ، أيضاً للانحراف المعياري للمجتمع بالرمز σ بينما يرمز للانحراف المعياري للعينة بالرمز S وهكذا.

توزيعات المعاينة: Sampling Distributions

نفرض أننا أخذنا عينه حجمها n من مجتمع ما ، ثم سحبنا منها بعض المقاييس الإحصائية مثل المتوسط الحسابي ، التباين ، ... فإن كل مقياس من هذه المقاييس يعتبر متغير عشوائي في ذاته يختلف من عينه إلى أخرى – هذا المتغير العشوائي يخضع لتوزيع معين –هذا التوزيع يسمى بتوزيع العينة.فمثلاً نقول أن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي وهو عبارة عن توزيع جميع المتوسطات الحسابية للعينات المأخوذة من نفس هذا المجتمع ذات الحجم n ، وكذلك فإن توزيع المعاينة للتباين هو توزيع جميع التباينات المحسوبة من عينات لها نفس الحجم n ومأخوذة من نفس المجتمع ، وهكذا ... .

1- توزيعات المعاينة للأوساط: Sampling Distributions of Means

نفرض أننا سحبنا عينه حجمها n من مجتمع لانهائي ، القيمة المتوقعة له تساوي μ والانحراف المعياري هو σ فإن المتوسط الحسابي $\overline{X}$ يخضع لتوزيع ما ، متوسط هذا التوزيع وانحرافه المعياري هما

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad ، \mu_{\overline{X}} = \mu$$

وفي الحالة التي يكون فيها المجتمع الأصلي المسحوبة منه العينة مجتمع طبيعي (ويرمز له بالرمز $N(\mu, \sigma^2)$ فإن توزيع المعاينة للمتوسط الحسابي $\overline{X}$ يكون في هذه الحالة توزيع طبيعي أيضاً له نفس المتوسط الأصلي μ ولكن انحرافه المعياري يساوي $\sigma/\sqrt{n}$ ، أي بمعنى أن

$$X \sim N(\mu,\sigma^2) \quad \Rightarrow \quad \overline{X} \sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$$

ومن ثم يكون

$$z = \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$$

أما إذا كان المجتمع غير طبيعي فإن $\overline{X}$ لا تخضع للتوزيع الطبيعي ولكنها تتوزع توزيع يكون قريباً من التوزيع الطبيعي لقيم n الكبيرة $(n \geq 30)$ حيث أن

$$z = \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)}{\sigma} \xrightarrow[n \to \infty]{as} N(0,1)$$

وتعتبر النتيجة السابقة الهامة جداً في الإحصاء وخاصة في التطبيقات العلمية وتسمى نظرية النهاية المركزية Central Limit Theorem والتي تنص على أنه في حالة العينات الكبيرة الحجم فإن المتوسط الحسابي $\overline{X}$ يخضع للتوزيع الطبيعي بالمعاملات μ و $\frac{\sigma^2}{n}$ ، حيث أن μ, σ^2 هما متوسط وتباين المجتمع الأصلي بغض النظر

عن شكل توزيع المجتمع الأصلي. ومن ثم فإنه لقيم n الكبيرة تتحقق العلاقة (3-4) بصرف النظر عن توزيع المجتمع الأصلي.

مثـــــال

تقوم إحدى شركات صناعة الأحذية بتصنيع **10000** حذاء يوميا . فإذا كانت فترة صلاحية الحذاء من هذا المنتج تتبع التوزيع الطبيعي المعتاد بتوقع سنة وتباين **0.563** فإذا سحبت عينة حجمها **25** حذاء من الإنتاج اليومي لهذه الشركة أوجد ما يلي

1 – احتمال أن يكون متوسط عمر الحذاء في العينة اكبر من **1.4**

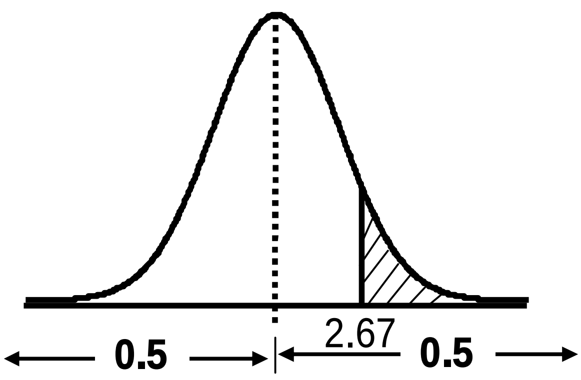
2 - احتمال أن يكون متوسط عمر الحذاء في العينة اقل من **9**شهور

$$\mu = 1 \quad , \quad \sigma^2 = 0.563 \quad \Rightarrow \quad \sigma = \sqrt{0.563} = 0.75$$
$$n = 25 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{n} = \sqrt{25} = 5$$
$$\mu(\bar{X}) = \mu = 1 \quad , \quad \sigma(\bar{X}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.75}{5} = 0.15$$

و الآن نقوم بحساب الاحتمالات كالتالي

$$P_r(\bar{X} > 1.4)$$
$$= P_r\left(\frac{\bar{X} - \mu(\bar{X})}{\sigma(\bar{X})} > \frac{1.4 - 1}{0.15}\right) = P_r(Y > 2.67)$$

وبالتالي تم تحويل المتغير إلى متغير طبيعي و يمكن رسم هذا الاحتمال علي المنحني الطبيعي كالتالي



لاحظ أن المساحة اسفل كل نصف من المنحني تساوي 0.5

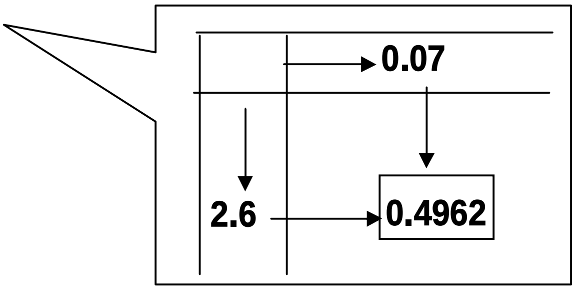
من الرسم نلاحظ أن

$$P_r(Y > 2.67) = 0.5 - P_r(0 < Y < 2.67)$$

ومن الجدول(ملحق 4) نجد أن

$$P_r(0 < Y < 2.67) = 0.4962$$

والشكل المقابل يبين كيفية البحث في الجدول



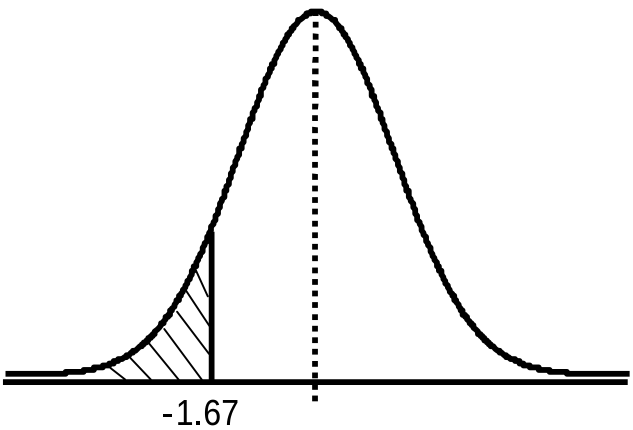
$$\therefore P_r(Y > 2.67) = 0.5 - 0.4962 = 0.0038$$

2 - احتمال أن يكون متوسط عمر الحذاء في العينة اقل من 9شهور

لاحظ أن 9شهور تحول إلى $\frac{9}{12} = 0.75$ سنة ثم نحسب الاحتمال كالتالي

$$P_r(\overline{X} < 0.75)$$
$$= P_r\left(\frac{\overline{X} - \mu(\overline{X})}{\sigma(\overline{X})} < \frac{0.75 - 1}{0.15}\right) = P_r(Y < -1.67)$$

وبالتالي تم تحويل المتغير إلى متغير طبيعي و يمكن رسم هذا الاحتمال علي المنحني الطبيعي كالتالي



من الرسم نلاحظ أن

$$P_r(Y < -1.67) = 0.5 - P_r(-1.67 < Y < 0)$$

ومن الجدول نجد أن

$$P_r(-1.67 < Y < 0) = P_r(0 < Y < 1.67) = 0.4525$$
$$\therefore P_r(Y < -1.67) = 0.5 - 0.4525 = 0.0475$$

مثـــــــال

سحبت عينة عشوائية بسيطة من مجتمع معتاد فوجد أن توقع و انحراف معياري الوسط الحسابي في العينة علي النحو التالي

$$\mu(\overline{X}) = 100 \qquad , \qquad \sigma(\overline{X}) = 15$$

1 – احتمال أن يكون المتوسط في العينة اقل من 118 ساعة

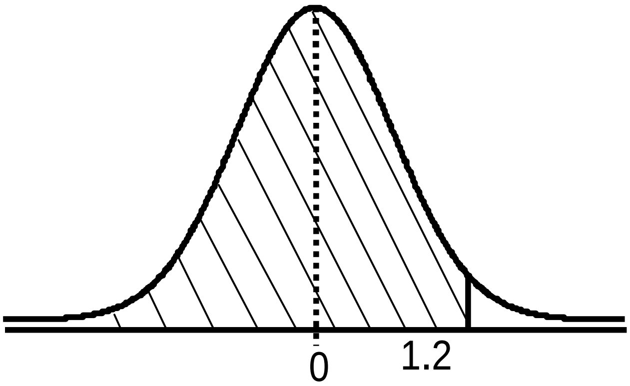
2 – احتمال أن يكون المتوسط في العينة يتراوح بين (119، 129)

3 – احتمال أن يكون المتوسط في العينة اكبر من 125 ساعة

نقوم بحساب الاحتمالات كالتالي

$$1) P_r(\overline{X} < 118)$$
$$= P_r\left(\frac{\overline{X} - \mu(\overline{X})}{\sigma(\overline{X})} < \frac{118 - 100}{15}\right) = P_r(Y < 1.2)$$

وبالتالي تم تحويل المتغير إلى متغير طبيعي و يمكن رسم هذا الاحتمال علي المنحني الطبيعي كالتالي



من الرسم نلاحظ أن

$$P_r(Y < 1.2) = 0.5 + P_r(0 < Y < 1.2)$$

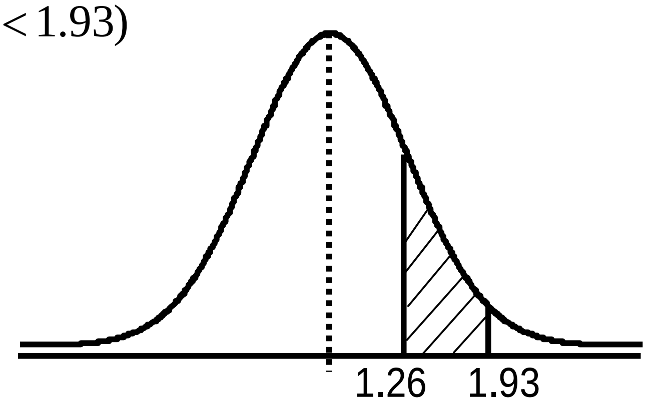
ومن الجدول(ملحق 4) نجد أن

$$P_r(0 < Y < 1.2) = 0.3849$$
$$\therefore P_r(Y < 1.2) = 0.5 + 0.3849$$
$$= 0.8849$$

$$2) P_r(119 < \overline{X} < 129)$$

$$= P_r\left(\frac{119-100}{15} < \frac{\overline{X} - \mu(\overline{X})}{\sigma(\overline{X})} < \frac{129-100}{15}\right)$$

$$= P_r(1.26 < Y < 1.93)$$



من الرسم نلاحظ أن

$$P_r(1.26 < Y < 1.93) = P_r(0 < Y < 1.93) - P_r(0 < Y < 1.26)$$

ومن الجدول(ملحق **4**) نجد أن

$$P_r(0 < Y < 1.93) = 0.4732 \quad , \quad P_r(0 < Y < 1.26) = 0.3962$$

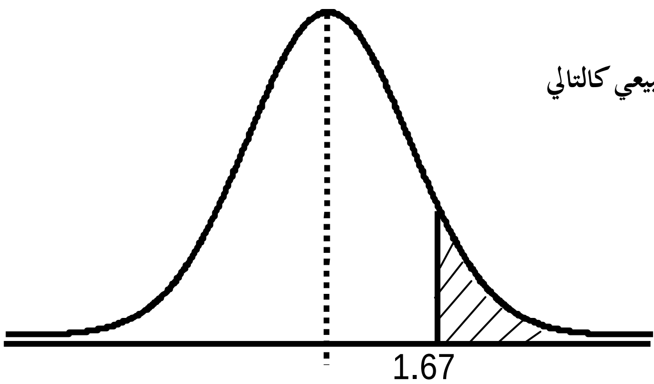
$$\therefore P_r(1.26 < Y < 1.93) = 0.4732 - 0.3962 = 0.077$$

$$3) P_r(\overline{X} > 125)$$

$$= P_r\left(\frac{\overline{X} - \mu(\overline{X})}{\sigma(\overline{X})} > \frac{125-100}{15}\right) = P_r(Y > 1.67)$$

وبالتالي تم تحويل المتغير إلى متغير طبيعي و

يمكن رسم هذا الاحتمال علي المنحني الطبيعي كالتالي



من الرسم نلاحظ أن

$$P_r(Y > 1.67) = 0.5 - P_r(0 < Y < 1.67)$$

ومن الجدول نجد أن

$$P_r(0 < Y < 1.67) = 0.4525$$

$$\therefore P_r(Y > 1.67) = 0.5 - 0.4525 = 0.0475$$

كذلك فإنه إذا كان $\overline{X}_1$ هو المتوسط الحسابي لعينه عشوائية مسحوبة من مجتمع لانهائي متوسطه هو μ_1 وانحرافه المعياري هو σ_1 ، وكان $\overline{X}_2$ هو المتوسط الحسابي لعينة عشوائية مسحوبة من مجتمع لانهائي آخر متوسط μ_2 وانحرافه المعياري σ_2 وكانت العينتين مستقلتين فإن المجموع الجبري لمتوسط العينتين يخضع لتوزيع المعاينة بالمعاملات

$$\mu_{(\bar{x}\pm\bar{x}_2)} = \mu_1 \pm \mu_2 \quad \text{and} \quad \sigma^2_{(\bar{x}_1\pm\bar{x}_2)} = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

حيث n_1, n_2 هما حجم العينة الأولى والثانية.

وإذا كان المجتمعين الأصليين طبيعيين فإن $(\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2)$ يخضع لتوزيع طبيعي أيضاً بالبارامترات المعطاة في المعادلة السابقة وعليه فإنه في هذه الحالة

$$z = \frac{(\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2) - (\mu_1 \pm \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

أما إذا كان أحد المجتمعين أو كليهما لا يتوزع توزيعاً طبيعياً فإن $(\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2)$ لا يتوزع توزيعاً طبيعياً كذلك ، ولكن لقيم n_1, n_2 الكبيرة فإنه طبقاً لنظرية النهاية المركزية السابقة فإن $(\bar{x}_1 \pm \bar{x}_2)$ يتوزع توزيعاً قريباً من التوزيع الطبيعي وبذلك يمكننا استخدام نفس العلاقة السابقة في حالة العينات الكبيرة.

2- توزيع المعاينة للتباين: Sampling Distribution of The Variance

إذا كان $s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$ هو تباين عينه عشوائية حجمها n مأخوذة من مجتمع متوسطه μ وتباينه σ^2 وعزمه الرابع حول المتوسط هو μ_4 فإن

$$\mu_{S^2} = \sigma^2 \quad \text{and} \quad \sigma^2{}_{s^2} = \frac{\mu_4 - \sigma^2}{n-1}$$

وإذا كان المجتمع طبيعي فإن $\mu_4 = 3\sigma^2$ وبالتالي فإن

$$\sigma^2_{s^2} = \left(\frac{2}{n-1}\right)\sigma^2$$

نلاحظ هنا أن S^2 لا تتوزع طبيعي حتى ولو كان المجتمع طبيعي ، ولكنه يتوزع توزيع قريب من التوزيع الطبيعي وذلك لقيم nالكبيرة $(n \geq 100)$. أما إن كان المجتمع الأصلي يخضع للتوزيع الطبيعي فإن المتغير $(n-1)s^2/\sigma^2$ يخضع لتوزيع يسمى توزيع مربع كاي χ^2 بعدد درجات حرية يساوي$n-1$. أي أن

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \quad \sim \quad \chi^2(n-1)$$

ويعتبر توزيع مربع كاي من التوزيعات الهامة في الإحصاء التطبيقي ودالة كثافته هي

$$f(y) \;=\; y^{\frac{v-1}{2}} \; e^{-y/2} \quad , \quad y > 0$$

حيث v هي عدد درجات الحريه للتوزيع وتعتبر هي المعامل الوحيد له ويتضح من شكل الدالة أنها داله متصلة وتقع بأكملها فوق النصف الموجب لمحور السينات ، منحنى هذه الداله غير متماثل ويعتبر من المنحنيات موجبة الالتواء

ويقل التواؤه (وبالتالي يقترب من التماثل) كما زادت درجات الحريه v. وتكون القيمة المتوقعة لهذا التوزيع هي v و

تباينه هو $2v$ أي بمعنى أن

$$E(y)=\mu_y=v$$

$$V(y)=\sigma^2=2v$$

فإذا كان s_1^2 هو تباين عينه عشوائية حجمها n_1 مسحوبة من مجتمع طبيعي $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ ، وكان s_2^2 هو

تباين عينه عشوائية أخرى حجمها n_2 ومسحوبة من مجتمع طبيعي آخر $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ وكانت العينتان مستقلتان فإن

المتغير:

$$\frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1,n_2-1)$$

حيث أن $F(n_1-1,n_2-1)$ تسمى بتوزيع F بدرجتي الحريه n_1-1 و n_2-1 و دالة الكثافة الإحتماليه

للمتغير y الذي يخضع لتوزيع F بدرجتي الحريه v_1,v_2 تعطى بالصورة:

$$f(y) = \frac{y^{\frac{v_1}{2}-1}}{(v_1y+v_2)^{\frac{v_1+v_2}{2}}} \quad , \quad y>0$$

وكما يتضح من الداله في الشكل السابق أن المنحنى يقع بالكامل في النصف الموجب لمحور السينات كما في حالة

توزيع χ^2 ، وهو أيضاً غير متماثل وموجب الالتواء ولكن يقترب من التماثل كلما زادت درجات الحريه v_1,v_2.

ذكرنا سابقاً أنه إذا كان $\bar{X}$ هو المتوسط الحسابي لعينه حجمها n مأخوذة من مجتمع طبيعي بالمعاملات μ,σ^2 فإن

$$z=\frac{\sqrt{n}\,(\bar{x}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$$

هذا إذا كانت σ معلومة ، ولكن في حالة ما إذا كانت قيمة σ غير معلومة فإننا نستخدم بدلا منها الانحراف المعياري للعينة S ولكن في هذه الحالة يصبح المتغير $\frac{\sqrt{n}\,(\bar{x}-\mu)}{S}$ يخضع لتوزيع يعرف بتوزيع t ستيودنت $t-\text{student}$ بدرجات حريه $n-1$ ، أي أن

$$t=\frac{\sqrt{n}\,(\bar{x}-\mu)}{s} \quad \sim \quad t(n-1)$$

دالة الكثافة لتوزيع t بدرجات حريه v تعطي بالصورة:

$$f(t)= \quad (1+\frac{t^2}{v})^{-\frac{v+1}{2}}$$

وهو توزيع متماثل حول محور y وهو يشبه في ذلك المنحنى الطبيعي القياسي $N(0,1)$ ولكنه أقل تحدباً من التوزيع الطبيعي القياسي ولكنه يقترب من التوزيع الطبيعي كلما زادت درجات الحريه.

وإذا كان $\bar{X}_2$ و S_1^2 هما المتوسط الحسابي والتباين لعينه حجمها n_1 مأخوذة من مجتمع طبيعي متوسط هو μ_1 وكان $\bar{X}_2$ و S_2^2 هما المتوسط الحسابي والتباين لعينه أخرى حجمها n_2 ومأخوذة من مجتمع طبيعي آخر له المتوسط μ_2 وكانت العينتان مستقلتان فإن المتغير

$$t=\frac{(\bar{X}_2 \pm \bar{X}_2)-(\mu_1 \pm \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \quad \sim \quad t(n_1+n_2-2)$$

حيث أن $S_p^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$ يسمى بالتباين المشترك للعينتين The Pooled Variance.

الفصل الثاني

التقدير : Estimation

مقدمة:

المقصود بالتقدير هو تقدير معالم المجتمع الإحصائي (أو التوزيع الاحتمالي)والتي غالباً ما تكون مجهولة ويكون المطلوب هو الحصول على تقديرات لها -عادة– من بيانات العينة فقد يكون المطلوب تقدير متوسط دخل الدولة، أو تقدير متوسط عمر الناخب... وغيرها.

وهناك نوعان (أو أسلوبان) للتقدير يسمى الأول تقدير النقطة (أو القيمة الواحدة)، ويسمى الثاني تقدير الفترة (أو فترة التقدير أو الثقة).

ففي حالة تقدير النقطة نحصل على قيمة واحدة من العينة، وتستخدم هذه القيمة الواحدة كتقريب أو كتقدير لمعلمة المجتمع المجهولة. فمثلاً لو أخذنا الوسط الحسابي للدخل في العينة كتقدير لمتوسط الدولة نكون قد حصلنا على تقدير نقطة لمتوسط دخل الدولة. وكمثال آخر لو أخذنا نسبة الناخبين في العينة الذين يؤيدون مرشحا معيناً كتقدير لهذه النسبة في المجتمع نكون حصلنا على تقدير نقطة للنسبة في مجتمع الناخبين

أما في تقدير الفترة أو فترة التقدير فنحصل على مدى Range أو فترة تتحدد بحدين (حد أدنى وحد أعلى) - نحصل عليهما من العينة. ونلاحظ هنا أن فترة التقدير (أو تقدير الفترة)تحتوي على أكثر من قيمة بل قد يكون عدد القيم غير محدود أو لا نهائياً في كثير من الحالات. فمثلاً : إذا قدرنا أن الوسط الحسابي لأعمار الناخبين يتراوح بين: + 40 6 - 6,40 سنة أي يتراوح بين : 34 سنة كحد أدنى و 46 سنة كحد أعلى نكون قد حصلنا على تقدير فترة للوسط الحسابي لأعمار الناخبين في المجتمع - ونلاحظ أن هذه الفترة (34, 46) تحتوي على عدد لا نهائي من الأعمار، بمعنى أن العدد لا يقتصر فقط على الأعداد الصحيحة والتي تشمل السنوات، ولكنها تشمل أيضا كسور السنوات، والأيام والشهور، والساعات... الخ وسوف نرى كيف نحدد فترة التقدير هذه في بعض الحالات.

وتتميز تقديرات الفترة بالإضافة إلى أنها تحتوي على عدد كبير جداً من القيم، بأنه يمكن حساب احتمال أن يكون التقدير صحيحاً ، وبالتالي فإنه يمكن معرفة مدى دقة التقديرات. لذافإن فترات التقدير تسمى أيضاً "فترات الثقة " Confidence intervals لأن هذه الفترات تعتمد في تكوينها الإحصائي على درجات أو مستويات ثقة معينة Confidence Levels مثل 95% أو % 99 وغيرها، بمعنى أن احتمال أن تكون فترة التقدير صحيحة هو 0.95 أو 0.99 وهكذا...

فإذا كان متوسط أعمار الناخبين يتراوح ما بين 46 و 34 سنة، ودرجة الثقة هي % 95 فإن هذا معناه أنه لو تكررت التجربة مائة مرة،فإن التقدير سيكون محصوراً بين هذين الرقمين في 95 من الحالات (أي احتمال أن يكون صحيحاً هو 95%).

فترة تقدير الوسط الحسابي للمجتمع في حالة العينات الكبيرة (فترة الثقة للوسط):

إذا كان المجتمع المسحوب منه العينة ذا توزيعاً طبيعياً وتباينه معروفاً أو كانت العينة كبيرة (أي حجمها ثلاثون مفردة أو أكثر)فإن توزيع المعاينة للوسط الحسابي يكون توزيعاً طبيعياً ،وطالما نحن نتكلم عن تقدير متوسط المجتمع فإن أول ما نفكر فيه هو الوسط الحسابي للعينة. وفترة التقدير (أو الثقة) للوسط الحسابي للمجتمع تأخذ الشكل التالي :

تقدير متوسط المجتمع = الوسط الحسابي للعينة ± الخطأ المعياري للوسط وبالرموز فإن :

$$\hat{\mu} = \overline{X} \pm 1\sigma\overline{x}$$

حيث $\hat{\mu}$ تقدير الوسط الحسابي للمجتمع، $\overline{X}$ هو الوسط الحسابي للعينة، $\sigma_{\overline{x}}$ هو الخطأ المعياري للوسط، + تشير للجمع فنحصل على الحد الأعلى لفترة التقدير، - تشير للطرح فنحصل على الحد الأدنى، ولكن احتمال أن يكون هذا الكلام صحيحا هو 68.26 % فقط، أي أن درجة الثقة هنا لا تتعدى % 68.26 فإذا أضفنا وطرحنا ضعف الخطأ المعياري يرتفع الاحتمال إلى 95.44% أي ترتفع درجة الثقة إلى % 95.44 وفي هذه الحالة تأخذ فترة الثقة الشكل التالي :

$$\hat{\mu} = \overline{X} \pm 2\sigma\overline{x}$$

وإذا أضفنا وطرحنا ثلاثة أمثال الخطأ المعياري يصبح الاحتمال % 99.72 أي ترتفع درجة الثقة إلى 99.72% وتأخذ فترة الثقة الشكل التالي :

$$\hat{\mu} = \overline{X} \pm 3\sigma\overline{x}$$

أي أنه بزيادة درجة الثقة يزيد طول الفترة. ومما سبق نلاحظ ما يلي :

1- أن هناك علاقة وثيقة بين درجة الثقة والرقم أو " المعامل المضروب في الخطأ المعياري فهو إما 1 أو 2 أو 3 على حسب درجة الثقة 68.26% أو 95.44% أو % 99.72 ولذلك فإن هذا المعامل هو الذي يسمى " معامل الثقة ". فبناء على درجة الثقة المطلوبة يتحدد معامل الثقة.

2- أن درجات ومعاملات الثقة التي ذكرناها تخص التوزيع الطبيعي، وأن المعاملات 1 أو 2 أو 3 ما هي إلا الدرجة المعيارية (Z) والتي نحصل عليها من جدول التوزيع الطبيعي المعياري وذلك بقسمة درجة الثقة (أو الاحتمال) على 2 (حيث أن المساحة موزعة بالتساوي على يمين ويسار الوسط) ثم بالكشف في المساحات تحت المنحنى الطبيعي المعياري عن خارج القسمة (أو أقرب رقم له) فنحصل على Z المقابلة وهذا يرجع إلى أن توزيع المعاينة للوسط هو التوزيع الطبيعي.

3- يمكن الحصول على فترات تقدير بأي درجة ثقة أخرى (غير الثلاث التي ذكرناها) وذلك بقسمة درجة الثقة المطلوبة - كما ذكرنا - على 2 ثم الكشف في المساحات حتى نحصل على Z المناسبة.

4- والخلاصة : أن فترة التقدير (أو الثقة) للوسط الحسابي للمجتمع تأخذ الشكل التالي:

$$\boxed{\overline{X} \pm Z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{\chi}}}$$

حيث تحدد $Z_{\alpha/2}$ من درجة الثقة α – 1. وحيث أن الخطأ المعياري للوسط $\sigma_{\overline{\chi}}$ يأخذ الشكل التالي.

$$\boxed{\sigma_{\overline{\chi}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

فإن فترة تقدير الوسط تأخذ الشكل النهائي التالي :

$$\boxed{\overline{X} \pm Z_{\alpha/2} \sigma_{\overline{\chi}}}$$

ويمكن تلخيص خطوات تقدير الوسط الحسابي للمجتمع فيما يلي :

أ – احسب الوسط الحسابي للعينة $\overline{x}$.

ب- احسب الخطأ المعياري للوسط $\sigma_{\overline{\chi}}$ والذي يساوي $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

جـ - أضرب الخطأ المعياري للوسط في معامل الثقة المناسب (أو الدرجة المعيارية) حسب درجة الثقة المطلوبة أي أحسب $Z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{\chi}}$.

د- اطرح حاصل الضرب السابق من الوسط الحسابي للعينة فنحصل على الحد الأدنى لفترة التقدير، واجمع حاصل الضرب مرة أخرى على الوسط الحسابي للعينة فتحصل على الحد الأعلى لفترة التقدير.

5- يمكن كتابة أشهر وأهم درجات ومعاملات الثقة (للتوزيع الطبيعي) في الجدول التالي (مع ملاحظة أن 95%، 99% هي أشهرها على الإطلاق)

معامل الثقة Z	درجة الثقة
1	68.26%
1.65	90%
1.96	95 %
2	95.44%
2.58	99%
3	99.72%

6- إذا كان الانحراف المعياري للمجتمع σ غير معروف - وهو غالبا ما يحدث في الواقع – فيمكن استخدام الانحراف المعياري للعينة S بدلا منه طالما كان حجم العينة كبيرا بدرجة كافية وتصبح فترة تقدير الوسط الحسابي للمجتمع كما يلي :

$$\boxed{\overline{X} \pm Z_{\alpha/2} \sigma_{\overline{\chi}}}$$

ولإيضاح هذه النقطة بشيء من التفصيل نأخذ المثال التالي :

مثال: لو أردنا معرفة متوسط الدخل اليومي لمجموعة من الناخبين في دولة ما، فإن ذلك يبدو أمرا صعباً من الناحية العملية نظراً لكبر حجم مجتمع الناخبين، إضافة إلى طول الوقت والتكاليف. لذا فإن الأسلوب العلمي المتبع في حالة كهذه هو اختيار عينة عشوائية نستطيع من خلال معرفة نتائجها تقدير متوسط دخول الناخبين في هذه الدولة.

فلو سحبت عينة عشوائية من مجموع مجتمع الناخبين في دولة ما حجمها 100 ناخب فإذا كان الوسط الحسابي والانحراف المعياري للدخل اليومي للناخبين بالعينة هما على الترتيب 90 دولار و 25 دولار، أوجد فترة تقدير للوسط الحسابي للدخل اليومي لمجموع الناخبين في هذه الدولة بدرجة ثقة 95% ؟

الحل

بما أن فترة تقدير الوسط الحسابي للمجتمع هي :

$$\boxed{\overline{X} \pm Z_{\alpha/2}\sigma_{\overline{\chi}}}$$

والمعلومات المعطاة هي :

حجم العينة n = 100

الوسط الحسابي للعينة $\overline{X} = 90$

والانحراف المعياري للعينة S = 25

وحيث أن درجة الثقة هي % 95 فإن : $Z_{\alpha/2} = 1.96$ حسب ما هو موضح في الجدول السابق. وبالتالي فإن فترة تقدير الوسط الحسابي للدخل اليومي لمجتمع الناخبين بدرجة ثقة % 95 هي :

$$90 \pm 1.96 \frac{25}{\sqrt{100}}$$

$$90 \pm 1.96(2.5)$$

$$90 \pm 4.9$$

$$85.1 \leq \mu \leq 94.9$$

أي أن الوسط الحسابي للدخل اليومي لمجتمع الناخبين يتراوح بين 85.1 دولاراً كحد أدنى، 94.9 كحد أعلى، وذلك بدرجة ثقة % 95.

مثـــال

إذا كانت القيمة المتوسطة للمتغير محل الدراسة المحسوبة من عينة عشوائية بسيطة حجمها n بحيث n=100 مفردة تساوي $\overline{X} = 25$ فإذا كانت العينة مسحوبة من مجتمع معتاد تباينه $\sigma^2 = 25$. قدر فترة الثقة لمتوسط المجتمع μ المسحوب منة العينة عند درجة ثقة 95%

الحــل

$$n = 100 \qquad , \quad \overline{X} = 25 \qquad , \quad \sigma^2 = 25 \Rightarrow \sigma = \sqrt{25} = 5$$

$$1 - \alpha = 0.95 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0.05 \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

تباين المجتمع معلوم و بالتالي تكون فترة الثقة هى

$$\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

و نقوم بإيجاد القيمة الجدوليه كالتالي

$$0.5 - \frac{\alpha}{2} = 0.5 - 0.025 = 0.475$$

ومن جدول (Y) و عند البحث عكسياً نجد أن

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96$$

وبالتعويض في فترة الثقة نجد أن

$$\overline{X} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$25-1.96\frac{5}{\sqrt{100}} \le \mu \le 25+1.96\frac{5}{\sqrt{100}}$$

$$25-0.98 \le \mu \le 25+0.98$$

$$24.02 \le \mu \le 25.98$$

و معنى هذه الفترة هو أن المتوسط للمجتمع يتراوح بين 24.02 و 25.98 و ذلك بدرجة ثقة 95%

فترة تقدير الوسط الحسابي للمجتمع في حالة العينات الصغيرة

إذا كان المجتمع المسحوب منه العينة ذا توزيعاً طبيعياً وتباينه غير معروف و كانت العينة صغيرة (أي حجمها أقل من ثلاثون مفردة) فإن توزيع المعاينة للوسط الحسابي يتبع توزيع ستيودنت t .

توزيع t - Distribution : t

تناولنا فيما سبق التقدير الإحصائي للوسط الحسابي للمجتمع في الحالات التي يكون فيها الانحراف المعياري للمجتمع معلوماً ، و (أو) أن العينة كبيرة بدرجة كافية. ولكن إذا كانت العينة صغيرة بمعنى أن حجمها أقل من (30) مفردة، والانحراف المعياري للمجتمع الطبيعي غير معلوم، فإن التوزيع الإحصائي المتبع في مثل هذه الحالات هو ما يطلق عليه " توزيع t " فعند تقدير متوسط عمر الناخب في مدينة ما عن طريق سحب عينة صغيرة (حجمها أقل من 30 ناخب) التوزيع الطبيعي يكون في مثل هذه الحالات غير مناسب لصغر حجم العينة أولاً ، ثم عدم معرفة الانحراف المعياري لعمر الناخب ثانياً . لذا فإن الأسلوب الإحصائي المتبع في حالات كهذه هو استخدام " توزيع t " والذي يسميه البعض "توزيع العينات الصغيرة".

ولعل الاختلاف الأساسي بين توزيع t والتوزيع الطبيعي هو أن الانحراف المعياري للعينة هو المستخدم في الأول بدلا من الانحراف المعياري للمجتمع في الثاني، وفيما عدا ذلك فالتوزيعان متماثلان وكلما زادت قيمة n كلما اقترب توزيع t من توزيع z ويعتمد توزيع t على ما يعرف بدرجات الحرية DEGREES OF FREEDOM والتي يرمز لها بالرمز اللاتيني (ميو).

درجات الحرية :

تعرف درجات الحرية بأنها عدد المشاهدات المستقلة في العينة والتي تساوي حجم العينة مطروحاً منه عدد القيود أو معالم المجتمع التي يتم تقديرها من بيانات العينة. وكمثال مبسط لشرح فكرة درجات الحرية نفترض أن لدينا 3 قيم واشترطنا أن مجموع القيم يساوي 10 فإن لدى الباحث في هذه الحالة حرية في اختيار الرقم الأول (وليكن 2) والثاني (وليكن 3) لذلك فإن قيمة الثالثة لابد وأن تكون (5) بالتالي نستطيع القول بأن درجة الحرية المتاحة لدى الباحث هي (2) أي 1 - 3 = 2 أي أن درجات الحرية في هذه الحالة هي :

$$n - 1$$

حيث n تساوي حجم العينة (والتي تساوي في المثال السابق 3)

والرقم (1) والذي طرحناه يعني الشرط الذي يحتم أن مجموع القيم = 10 وبصفة عامة إذا كان عدد القيود k فإن درجات الحرية تساوي n - k

شروط توزيع t.

ويمكن تحديد الشروط الثلاثة لاستخدام توزيع t كما يلي:

1- أن يكون المجتمع المسحوبة منه العينة له توزيع طبيعي.

2- والانحراف المعياري للمجتمع σ غير معروف (أو مجهول).

3- والعينة صغيرة (حجمها أقل من 30 مفردة).

تقدير الوسط الحسابي للمجتمع في حالة العينات الصغيرة :

تأخذ فترة تقدير الوسط الحسابي للمجتمع في حالة العينات الصغيرة الشكل التالي :

$$\boxed{\overline{X} - T_{\left[\frac{\alpha}{2},(n-1)\right]}\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + T_{\left[\frac{\alpha}{2},(n-1)\right]}\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

أو

$$\boxed{\overline{X} \mp T_{\left[\frac{\alpha}{2},(n-1)\right]} \frac{S}{\sqrt{n}}}$$

مثـــال

إذا كانت دخول مجموعة من الأفراد في دولة ما تتبع التوزيع الطبيعي، وسحبت منهم عينة عشوائية حجمها 10أفراد بوسط حسابي دولاراً $\overline{X} = 72$ وانحراف معياري بلغ دولاراً S= 6.4 أنشئ فترة تقدير للوسط الحسابي للدخل اليومي لجميع الأفراد بدرجة ثقة % 95

الحل

نلاحظ أولاً : أن العينة صغيرة (حجمها 10 أفراد فقط) وأن المجتمع طبيعي وانحرافه المعياري غير معروف لذلك نستخدم فترة تقدير الوسط للعينات الصغيرة التي تعتمد على توزيع t

وحيث أن n = 10 فإن درجات الحرية لها هي :

$$n - 1 = 10 - 1 = 9$$

وحيث أن درجة الثقة المطلوبة هي $1-\alpha = 0.95$ فإن مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ وبالتالي فإن نصف مستوى المعنوية هو :

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{0.05}{2} = 0.025$$

أي يتم الكشف في جدول (II) عند درجات حرية تساوي 9 تحت احتمال (نصف مستوى المعنوية) 0.025 أي أن :

$$t_{0.025,9} = 2.262$$

وبالتعويض عن فترة تقدير الوسط نحصل على المعادلة التالية :

$$\overline{X} \mp T_{\left[\frac{\alpha}{2},(n-1)\right]} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$72 \pm 2.262 \ \frac{6.4}{\sqrt{10}}$$

$$72 \pm \frac{14.48}{3.16}$$

$$72 \pm 4.6$$

$$67.4 \leq \mu \leq 76.6$$

أي أن الوسط الحسابي للدخول اليومية يتراوح بين 67.4دولاراً كحد أدنى. 76.6دولاراً كحد أعلى وذلك بدرجة ثقة % 95.

مثـــــــال

إحدى شركات تجميع سيارات الركوب الخاصة تقوم بتقدير متوسط الأجر الشهري للعاملين بها فتم سحب عينة من 8 عمال و وجد أن متوسط الأجر الشهري بالعينة 300 جنية و التباين 400

قدر فترة ثقة لمتوسط دخل العامل في هذه الشركة بدرجة ثقة 99%

الحـــل

$$n=8 \qquad , \quad \bar{X}=300 \qquad , \quad S^2=400 \Rightarrow S=\sqrt{400}=20$$

$$1-\alpha=0.99 \quad \Rightarrow \quad \alpha=0.01 \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha}{2}=0.005$$

تباين المجتمع غير معلوم و [$n<30$]بالتالي تكون فترة الثقة هى

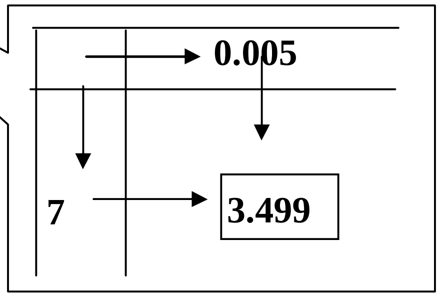
$$\bar{X}-T_{\left[\frac{\alpha}{2},(n-1)\right]}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X}+T_{\left[\frac{\alpha}{2},(n-1)\right]}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

و نقوم بإيجاد القيمة الجدوليه كالتالي

$$n-1=8-1=7 \qquad , \quad \frac{\alpha}{2}=0.005$$

ومن جدول (T) و عند البحث نجد أن

$$T_{\left[\frac{\alpha}{2},(n-1)\right]} = T_{(0.005,7)} = 3.499$$



وبالتعويض في فترة الثقة نجد أن

$$\overline{X} - Y_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X} + Y_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$300 - 3.499\frac{20}{\sqrt{8}} \le \mu \le 300 + 3.499\frac{20}{\sqrt{8}}$$

$$300 - 24.73 \le \mu \le 300 + 24.73$$

$$275.27 \le \mu \le 324.73$$

مثـــــال

سـحبت عينــة عشـوائية مكونــة مـن 4 مفـردات مـن مجتمــع معتــاد و سـجلت قـيم المشاهدات فكانت علي النحو التالي 10 , 8 , 12 , 6 أوجد فترة ثقة للوسط الحسابي للمجتمع بدرجة ثقة 95%

الحـل

نقوم بحساب $\overline{X}$, S^2 كالتالي

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X}{n} = \frac{6+12+8+10}{4} = \frac{36}{4} = 9$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[X - \bar{X}\right]}{n-1} = \frac{(6-9)^2 + (12-9)^2 + (8-9)^2 + (10-9)^2}{4-1}$$

$$= \frac{9+9+1+1}{3} = 6.67$$

$$\therefore S = \sqrt{6.67} = 2.58$$

$$1-\alpha = 0.95 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0.05 \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

تباين المجتمع غير معلوم و [$n < 30$]بالتالي تكون فترة الثقة هى

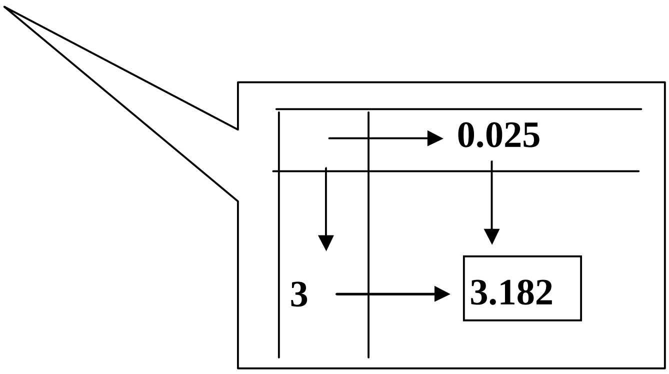
$$\bar{X} - T_{\left[\frac{\alpha}{2},(n-1)\right]}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + T_{\left[\frac{\alpha}{2},(n-1)\right]}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

و نقوم بإيجاد القيمة الجدوليه كالتالي

$$n-1 = 4-1 = 3 \quad , \quad \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

ومن جدول (T) و عند البحث نجد أن

$$T_{\left[\frac{\alpha}{2},(n-1)\right]} = T_{(0.025,3)} = 3.182$$



وبالتعويض في فترة الثقة نجد أن

$$\bar{X} - T_{\left[\frac{\alpha}{2},(n-1)\right]}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + T_{\left[\frac{\alpha}{2},(n-1)\right]}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$9 - 3.182\frac{2.58}{\sqrt{4}} \le \mu \le 9 + 3.182\frac{2.58}{\sqrt{4}}$$

$$9 - 4.1 \le \mu \le 9 + 4.1$$

$$4.9 \le \mu \le 13.1$$

فترة تقدير النسبة للمجتمع (أو فترة الثقة للنسبة):

إن تقدير النسبة في المجتمع تعتبر من الحالات المهمة لقياس الظواهر السياسية، وبالذات الوصفية منها كقياس اتجاهات الرأي العام، وقياس نسبة قتلى الحروب، ونسبة الدول التي أوفت بالتزاماتها في المنظمات الدولية أو الإقليمية...وغيرها ونظراً لأنه من الصعوبة بمكان في كثير من الأحيان حساب هذه النسبة مباشرة من المجتمع، فإننا غالبا ما نلجأ لتقدير هذه النسبة من عينة عشوائية مسحوبة من هذا المجتمع.

فلو افترضنا أن نسبة المؤيدين للسياسة الاقتصادية التي تنتهجها دولة ما هي P وأن العينة العشوائية كبيرة بدرجة كافية وأن نسبة مؤيدي هذه السياسة في العينة هي $\hat{P}$ فإن خطوات تقدير النسبة في المجتمع تكون كما يلي :

أ- احسب النسبة في العينة $\hat{P}$.

ب- احسب الخطأ المعياري للنسبة والتي تساوي في هذه الحالة :

$$\boxed{\sigma_{\hat{P}} = \sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}}$$

جـ- اضرب الخطأ المعياري للنسبة في معامل الثقة المناسب Z (حسب درجة الثقة المطلوبة) والتي نحصل عليها من جدول التوزيع الطبيعي المعياري (أو من الجدول الذي يحوي أهم درجات ومعاملات الثقة والذي ذكرناه آنفاً). أي نحسب:

$$z.\sigma_{\hat{\mathrm{P}}} = Z_{\alpha|2}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}$$

د – للحصول على الحد الأدنى لتقدير النسبة نطرح حاصل الضرب (السابق) من نسبة العينة $\hat{P}$ و للحصول على الحد الأعلى نجمع حاصل الضرب مع النسبة في العينة فنحصل على فترة تقدير النسبة. وبالتالي فإن فترة تقدير النسبة تكون في شكلها النهائي كما يلي :

$$\boxed{\hat{P} \pm Z_{\alpha|2}\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}}$$

ولتوضيح هذه الخطوات بشيء من التفصيل نورد المثال التالي :

مثال

عينة عشوائية حجمها 144 ناخباً سحبت من إحدى المدن فوجد أن عدد المؤيدين في العينة لمرشح معين هو 60ناخباً ، أنشئ فترة تقدير لنسبة المؤيدين لهذا المرشح في المدينة كلها بدرجة ثقة % 95.

الُ حل

1- نحسب أولاً نسبة المؤيدين للمرشح في العينة $\hat{P}$ التي نحصل عليها بقسمة عدد المؤيدين له على العدد الكلي للعينة (حجم العينة) أي أن :

$$\hat{P} = \frac{60}{144} = 0.42$$

وحيث أن درجة الثقة المطلوبة هي % 95 فإن معامل الثقة المناسب هو : Z = 196

وفترة تقدير نسبة المؤيدين لهذا المرشح في المدينة تأخذ الشكل التالي :

$$\boxed{P = \hat{P} \pm z\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}}$$

وبالتعويض عن حجم العينة n = 144

والنسبة في العينة $\hat{P} = 0.42$ ، $1-\hat{\mathrm{P}} = 1-0.42 = 0.58$

ومعامل الثقة $Z = 1.96$

نحصل على :

$$\hat{P} \mp Z_{\alpha/2}\sigma_{\hat{P}}$$

$$P = 0.42 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.42 \times 0.58}{144}}$$

$$= 0.42 \pm 0.08$$

$$0.34 \leq P \leq 0.50$$

أي أن نسبة المؤيدين للمرشح في المدينة تتراوح بين 0.34 , 0.50 وذلك بدرجة ثقة 95 % بمعنى آخر أن نسبة مؤيدي هذا المرشح في هذه المدينة لا تتجاوز 50 % كحد أعلى، وبالتالي ففرصته في الفوز كمرشح قد لا تكون كبيرة وذلك بدرجة ثقة 95 % بمعنى أن هذا الحكم لا تتجاوز نسبة الخطأ فيه 5 %.

مثـال

في استطلاع للرأى تم خلال شبكة الإنترنت على عينة مكونة من 2000 زائر لموقع معين على الشبكة وجد أن 1600 من هذه العينة يفضلون استخدام الموقع .

إنشئ فترة ثقة 99% لنسبة الذين يفضلون هذا الموقع .

الحـل

نرمز لعدد الناجحين بالرمز X

$$n = 2000 \qquad , \quad X = 1600$$

$$1 - \alpha = 0.99 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0.01$$

$$\therefore \hat{P} = \frac{X}{n} = \frac{1600}{2000} = 0.8$$

$$1 - \hat{p} = 1 - 0.8 = 0.2$$

و نقوم بإيجاد القيمة الجدوليه من القيم المفروض حفظها بالجدول السابق كالتالي

$$\alpha = 0.01 \quad \Rightarrow \quad Z_{\alpha/2} = 2.58$$

ونقوم بحساب $\sigma_{\hat{p}}$ كالتالي

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{0.8\times 0.2}{2000}} = 0.009$$

نقوم بالتعويض في فترة الثقة نجد أن

$$\hat{P} \mp Z_{\alpha/2}\sigma_{\hat{P}}$$

$$0.8 \mp 2.58\times 0.009$$

$$0.8 \mp 0.023$$

$$0.777 \le P \le 0.823$$

ومعنى هذه الفترة هو أن النسبة للمجتمع تتراوح بين 0.777 و 0.823 و ذلك بمعامل ثقة (بإحتمال) 99%

مثـــــــال

سحب عينة عشوائية من 200 طالب وطالبة فوجد أن 144 طالب و طالبة منهم اجتازوا امتحان الفصل الدراسي الأول

1 – أوجد نسبة الناجحين في العينة

2 – أوجد فترة الثقة لنسبة الناجحين في المجتمع بدرجة ثقة 95%

الحـل

نرمز لعدد الناجحين بالرمز X

$$n = 200 \qquad , \quad X = 144 \qquad 1-\alpha = 0.95 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0.05$$

$$1)\hat{\theta} = \frac{X}{n} = \frac{144}{200} = 0.72$$

$$2) \quad 1-\hat{p} = 1-0.72 = 0.28$$

و نقوم بإيجاد القيمة الجدوليه كالتالي

$$\alpha = 0.05 \quad \Rightarrow \quad Z_{\alpha/2} = 1.96$$

ونقوم بحساب $\sigma_{\hat{p}}$ كالتالي

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{0.72 \times 0.28}{200}} = 0.0317$$

نقوم بالتعويض في فترة الثقة نجد أن

$$\hat{P} \mp Z_{\alpha/2}\sigma_{\hat{P}}$$

$$0.72 \mp 1.96 \times 0.0317$$

$$0.72 \mp 0.0622$$

$$0.658 \leq P \leq 0.782$$

تحديد حجم العينة لتقدير الوسط الحسابي للمجتمع :

يعتبر تحديد حجم العينة المناسب من المشاكل المهمة والشائعة التي تواجه الباحثين في مختلف المجالات، وبالذات عند دراسة الظواهر السياسية، ويختلف تحديد حجم العينة باختلاف الهدف من التقدير.

فإذا كان المطلوب هو تقدير الوسط الحسابي للمجتمع، فإن فترة تقدير الوسط هي كما سبق وأن أوضحنا :

$$\overline{X} \pm Z.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ومنها نجد أن حجم العينة يأخذ الشكل التالي :

$$\boxed{n = \frac{Z^2\sigma^2}{e^2}}$$

حيث :

Z هو معامل الثقة (أو الدرجة المعيارية) المقابل لدرجة الثقة المطلوبة، ونحصل عليا من جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

$\{\sigma^2\}$ هو تباين المجتمع (أو هو مربع الانحراف المعياري).

e هو أقصى خطأ مسموح به في تقدير الوسط، وهو عادة ما يحدده الباحث، وتتوقف على أهمية الموضوع أو الظاهرة السياسية المراد دراستها، ومدى الدقة المطلوبة في التقدير، ويسمى اختصاراً "الخطأ في تقدير الوسط".

ولتوضيح كيفية تحديد حجم العينة المناسب عند تقدير الوسط الحسابي للمجتمع، نأخذ المثال التالي :

مثال

إذا كانت دخول الأفراد اليومية في إحدى دول العالم النامية تتبع التوزيع الطبيعي بانحراف معياري $\sigma = 15$ دولاراً ، فما هو حجم العينة المناسب لتقدير متوسط دخول الأفراد في هذه الدولة بحيث لا يتعدى الخطأ في تقدير متوسط الدخل اليومي 5 دولارات، وذلك بدرجة ثقة % 99 ؟

الحل

في هذا المثال نجد أن :

درجة الثقة % 99 أي أن : Z = 2.58

أقصى خطأ مسموح به هو 5 دولارات، أي أن : e = 5

والانحراف المعياري للمجتمع : $\sigma = 15$

وبالتعويض بهذه القيم في المعادلة التي تحدد حجم العينة وهي :

$$n = \frac{Z^2 . \sigma^2}{(e)^2} = 59.9 = 60$$

فإن حجم العينة مقرباً لأقرب عدد صحيح هو :

$$n = \frac{(2.58)^2 (15)^2}{5^2} \approx 60$$ فرداً

أي أنه يجب على الباحث أن يأخذ عينة لا يقل حجمها عن 60فرداً حتى يكون لديه تقديراً دقيقاً عن متوسط دخول الأفراد في هذه الدولة بحيث لا يتعدى الخطأ في تقديره لمتوسط الدخل عن خمس دولارات، وذلك بدرجة ثقة % 99.

تحديد حجم العينة لتقدير النسبة في المجتمع :

وبالطريقة نفسها يمكن تحديد حجم العينة اللازمة للحصول على درجة ثقة معينة عند تقدير النسبة في المجتمع بافتراض أن اقصى خطأ في التقدير مسموح به هو eتبعاً للمعادلة التالية:

$$\boxed{n = \frac{Z^2.P(1-P)}{e^2}}$$

حيث :

Z هو معامل الثقة (أو الدرجة المعيارية) المقابل لدرجة الثقة ونحصل عليه من جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

P هي النسبة في المجتمع (أو تقدير لها).

P - 1 هي النسبة المكملة. بمعنى إذا كانت نسبة المؤيدين 60 % فإن نسبة غير المؤيدين 40 %

e أقصى خطأ في التقدير مسموح به. "أو الخطأ في تقدير النسبة".

أي أن حجم العينة المناسب في هذه الحالة يساوي حاصل ضرب مربع z في النسبة،ثم في النسبة المكملة مقسوماً على مربع الخطأ المسموح به كما في المثال التالي:

مثال

يدعي أحد مراكز استطلاعات الرأي العام أنه عند دراسته لاتجاهات آراء الناخبين لاثنين من المتنافسين على أحد مقاعد السلطة التشريعية بأن نتائج دراسته هي من الدقة بحيث لا يتعدى نسبة الخطأ في التقدير %2، فما هو حجم العينة المناسب التي

نستطيع من خلالها الحكم على مدى صحة إدعاء هذا المركز بافتراض أن نسبة المؤيدين للمرشح هي % 50 وذلك بدرجة ثقة % 95.

الحل :

بما أن درجة الثقة % 95 فإن : Z = 1.96 بافتراض أن نسبة المؤيدين للمرشح هي

P= 0.5

وبالتالي فإن النسبة المكملة P - 1 هي :

1- P = 1 - 0.5 = 0.5

وحيث أن أقصى خطأ مسموح به هو :

e = 0.02

فإن حجم العينة اللازم هو :

$$\boxed{n = \frac{Z^2 . P(1-P)}{e^2}}$$

وبالتعويض نحصل على :

$$n = \frac{(1.96)^2 (0.5)(0.5)}{(0.02)^2}$$

$$\therefore n = \frac{0.9604}{0.0004}$$

$$\therefore n = 2401$$

أي أن حجم العينة المناسب الذي يعطي درجة الدقة المطلوبة هو 2401 ناخب. بمعنى آخر فإن على هذا المركز أن يستطلع حجم عينة لا يقل عددها عن هذا العدد.

تقدير فترة الثقة لتباين المجتمع

تكون فترة الثقة لتباين العينة كالتالي

$$\boxed{\frac{S^2(n-1)}{\chi_2^2} \le \sigma^2 \le \frac{S^2(n-1)}{\chi_1^2}}$$

حيث أن χ^2 تسمى [كا تربيع] و لها جدول خاص تستخرج منه كالتالي

χ_1^2 ⟸ تستخرج من جدول [كا] عند [$1-\frac{\alpha}{2}$] و درجة الحرية [$n-1$]

χ_2^2 ⟸ تستخرج من جدول [كا] عند $\frac{\alpha}{2}$ و درجة الحرية [$n-1$]

مثـــال

سـحبت عينــة عشـوائية مكونــة مـن 4 مفـردات مـن مجتمـع معتـاد و سـجلت قـيم المشاهدات فكانت علي النحو التالي 10 , 8 , 12 , 6 أوجد فترة ثقة لتباين المجتمع بدرجة ثقة 90%

الحـل

نقوم بحساب $\overline{X}$, S^2 كالتالي

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X}{n} = \frac{6+12+8+10}{4} = \frac{36}{4} = 9$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left[X - \overline{X}\right]}{n-1} = \frac{(6-9)^2 + (12-9)^2 + (8-9)^2 + (10-9)^2}{4-1}$$

$$= \frac{9+9+1+1}{3} = 6.67$$

$$\therefore S = \sqrt{6.67} = 2.58$$

$$1-\alpha = 0.90 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0.10 \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha}{2} = 0.05 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.95$$

n-1 = 3

من جدول كا نحسب القيم χ_1^2 و χ_2^2 كالتالي

	0.95	0.05
3	$\boxed{0.352}$	$\boxed{7.81}$

$$\therefore \chi_1^2 = 0.352 \qquad , \qquad \chi_2^2 = 7.81$$

و تكون فترة الثقة كالتالي

$$\frac{S^2(n-1)}{\chi_2^2} \le \sigma^2 \le \frac{S^2(n-1)}{\chi_1^2}$$

$$\frac{6.67(4-1)}{7.81} \le \sigma^2 \le \frac{6.67(4-1)}{0.352}$$

$$1.6 \le \sigma^2 \le 7.46$$

تمارين الفصل الثاني

1) شركة لصناعة المعلبات الغذائية تريد طرح منتج جديد لها في الأسواق ولقد قام قسم البحوث بالشركة باستطلاع رأي عينة من 600 شخص أوجد أن من بينهم 380 قالوا انهم سيفضلون هذا المنتج

- أنشئ فترة ثقة 90% لنسبة الأشخاص الذين سيفضلون هذا المنتج
- ما هو حجم العينة اللازم اختياره لاستطلاع أراء المستهلكين لهذا المنتج بحيث لا يختلف التقدير عن0.04 وذلك بالاعتماد علي النسبة الناتجة عن استطلاع الرأي في أ مستخدما مستوي ثقة 90%

2) شركة استثمارية تريد إنشاء مجموعة مطاعم للوجبات السريعة بأحد المدن الجديدة ولقد قامت إدارة البحوث بهذه الشركة بسحب عينة من 25 أسرة من هذه المدينة فوجد أن متوسط دخل الأسرة السنوي 50000 جنيه بانحراف معياري 7500 جنيه

أ] إذا علمت أن دخل الأسرة يقترب من التوزيع الطبيعي كون فترة ثقة 90% لمتوسط دخل الأسرة السنوي

ب] أرادت إدارة البحوث بالشركة الحصول علي دقة اكبر في البيانات فقامت بسحب عينة مكونة 64 أسرة فوجد أن متوسط الدخل السنوي للأسرة 52000 بانحراف معياري 4000جنيه أنشئ فتر ة ثقة 90% لمتوسط الدخل السنوي للأسرة وقارن بين النتائج في أ ، ب.

ج] إذا أرادت إدارة البحوث بالشركة تحديد حجم العينة اللازم لتقدير متوسط دخل الأسرة بحيث لا يتعدي الخطأ في التقدير عن 500 جنيه إذا كان الانحراف المعياري للدخل السنوي 4000 جنيه ما هو حجم العينة إذا تم استخدام معامل 90%.

3) بناء علي دراسة قام بها موقع yahoo علي شبكة الإنترنت وجد انه في عينة مكونه من 2000 من المتعاملين مع هذا الموقع أن متوسط عدد الساعات للزائر 15 ساعة في الأسبوع انحراف معياري 25 ساعة

المطلوب إنشاء فترة ثقة 95% لمتوسط عدد ساعات زيارة الموقع في الأسبوع.

4) مدير إدارة الائتمان بأحد البنوك يريد أن يقدر متوسط قيمة القروض الممنوحة للعملاء وبناء علي عينة مكونة من 40 عميل وجد ان متوسط قيمة القرض للعميل الواحد 22000 جنيه بانحراف معياري 4400 جنيه

المطلوب: انشاء فترة ثقة 99% لمتوسط قيمة القرض

5) في عينة مكونة من 10 من العاملين بأحد شركات المقاولات وجد انهم حصلوا علي أجور الإضافية التالية خلال ساعات العمل في الأسبوع الماضي بالجنيه

66 82 80 40 30 55 60 70 50 65

المطلوب فترة ثقة بمعامل ثقة 95 % لمتوسط الأجر الإضافي للعامل مع تحديد الشروط الواجب توافرها في البيانات حتى يمكن الاعتماد علي نتائج هذا التقدير

6) يرغب المسئولون في إحدى المصالح الحكومية الكبرى في اختيار عينة من الموظفين العاملين بها لتقدير نسبة الموظفين الذين يعملون في وظائف أخري مسائية بحيث لا يتعدي نسبة الخطأ في التقدير عن 12% وذلك بمعامل ثقة 95% ما هو حجم العينة المناسب في هذه الحالة

7) يبلغ تعداد سكان إحدى المدن الجديدة 250 آلف أسرة ولدراسة متوسط الدخل السنوي للأسرة الواحدة بهذه المدينة تم اختيار عينة عشوائية مكونه من 50 ألف أسرة فوجد آن متوسط الدخل السنوي للأسرة 30 ألف جنيه بانحراف معياري 4.8 ألف جنيه والمطلوب تقدير فترة ثقة 95% لمتوسط الدخل السنوي للأسرة.

8) شركة برمجيات الحاسب الآلي تريد أن تقدر متوسط الوقت اللازم لتعلم برنامج جديد طرحته في الأسواق والبيان التالي يوضح الوقت الذي يستغرقه كل فرد من أفراد عينة مكونة من 12 مستخدم جديد لهذا البرنامج

2.25 1.45 2.25 3.00 2.45 1.25 2.50 1.75 3.25 2.50 1.50 2.75

بافتراض أن الوقت اللازم لتعلم هذا البرنامج يتبع تقريبا التوزيع الطبيعي كون فترة ثقة 95% لمتوسط هذا الوقت مع تفسير معني هذه النتيجة

الفصل الثالث

اختبارات الفروض : Tests of Hypotheses

مقدمة:

المقصود بالفروض هنا الفروض الإحصائية statistical hypotheses بمعنى الفروض التي تتعلق بالمجتمع الإحصائي المسحوبة منه العينة، أو توزيع هذا المجتمع أو معالمه كالوسط الحسابي أو النسبة في المجتمع.

والفرض ما هو إلا تخمين أو استنتاج ذكي مبني على حيثيات معقولة أو منطقية ولكنه ليس مبنياً على حسابات دقيقة خاصة بالمجتمع لأننا نفترض أنه لا يمكن دراسة المجتمع بالكامل عن طريق الحصر الشامل بل نحاول استنتاج أو الاستدلال على مقاييس المجتمع باستخدام بيانات ونتائج العينة.

فمثلاً : قد يفترض الباحث أن متوسط الدخل الشهري للفرد في دولة ما هو 200 جنية بناءً على ما يراه من مستوى المعيشة في هذا البلد وأوضاعه الاقتصادية)، ويحتاج إلى اختبار علمي (إحصائي) لمعرفة مدى صحة هذا الفرض أو قد يفترض باحث آخر أن نسبة الناخبين في إحدى الدوائر الذين يؤيدون مرشحاً معيناً لا تقل عن % 30 وهكذا... والمطلوب هو اختيار مدى صحة هذه الفروض. أي أن يصل الباحث إلى قرار إما بقبول الفرض أو عدم قبوله (أي رفضه) وذلك باحتمال معين. وقبل تناول كيفية إجراء الاختبارات الإحصائية نستعرض أولاً بعض المفاهيم والتعريفات الأساسية اللازمة لهذا الموضوع حتى تكون الصورة أكثر وضوحاً ..

الفرض العدمي (أو الصفري) The Null Hypothesis

الفرض العدمي هو "الفرض الأساسي المراد اختباره". ويرمز له عادة بالرمز :Ho. هذا الفرض يأخذ – عادة – شكل معادلة أو مساواة. فمثلاً إذا كان الفرض العدمي المراد اختباره هو أن متوسط دخل الفرد في إحدى المناطق هو 200 جنية شهرياً فإن هذا الفرض يكتب بالرموز كما يلي :

$$Ho : \mu = 200$$

ويقرأ بالشكل التالي :

الفرض العدمي هو : أن متوسط دخل الفرد في المنطقة هو 200 جنيلةً شهرياً .

وكمثال آخر : إذا كان الفرض المراد اختباره هو أن نسبة المؤيدين لبرنامج اقتصادي معين بين عمال أحد المصانع هي % 30، فإن هذا الفرض يكتب بالرموز كما يلي :

$$Ho : P = 0.30$$

ويقرأ بالشكل التالي :

الفرض العدمي هو : أن نسبة المؤيدين للبرنامج الاقتصادي بين عمال المصنع هي 0.30

وليس شرطاً أن يصاغ الفرض العدمي بالرموز، فقد يتم التعبير عنه بدون رموز. فقد يريد الباحث أن يختبر ما إذا كانت هناك علاقة بين الأمية والاستعداد للانحراف، أو بين المؤهل العلمي ودرجة الوعي السياسي. فقد يصيغ الباحث الفرض العدمي بالشكل التالي (على سبيل المثال) :

الأمية والاستعداد للانحراف مستقلان

(أي لا توجد علاقة بينهما، أو أن العلاقة بينهما منعدمة).

الفرض البديل : The Alternative Hypothesis

في اختبارات الفروض يتحتم وضع فرض آخر غير الفرض العدمي المراد اختباره يسمى الفرض البديل. وهذا الفرض " هو الذي سيقبل في حالة رفض الفرض العدمي " أي لابد من تحديد فرض آخر بديل في الوقت الذي نحدد فيه الفرض العدمي، وبالتالي فإن الفرض البديل يعرف كما يلي :

"الفرض البديل هو الفرض الآخر الذي سيقبل في حالة رفض الفرض العدمي" ويرمز له عادة بالرمز : H1

والفرض البديل له أهمية كبيرة وبالذات في قياس الظواهر الاجتماعية – كما سوف نرى – فهو الذي يحدد نوع الاختبار المستخدم لذلك فهو يأخذ أحد أشكال ثلاثة هي :

أ- أن يأخذ شكل " لا يساوي ". وفي هذه الحالة نستخدم ما يسمى : اختبار الطرفين

فمثلاً : إذا كان الفرض العدمي هو أن متوسط الدخل الشهري لفئة معينة في المجتمع هو 300 جنية.

$$H_0 : \mu = 300$$

فإن الفرض البديل في هذه الحالة يأخذ الشكل التالي :

$$H_1 : \mu \neq 300$$

بمعنى أن متوسط دخل هذه الفئة من المجتمع " لا يساوي " 300 جنيةشهرياً .

ب- أو أن يأخذ شكل " أكبر من ". وفي هذه الحالة نستخدم ما يسمى " اختبار الطرف الأيمن ".

فمثلاً : قد يكون الفرض البديل كما يلي :

$$H_1 : \mu > 300$$

أي أن متوسط الدخل لهذه الفئة من المجتمع أكبر من 300 جنيةشهرياً .

ج-وأخيراً قد يأخذ الفرض البديل شكل " أقل من ".وفي هذه الحالة نستخدم ما يسمى " اختبار الطرف الأيسر" *.

فمثلاً : قد يكون الفرض البديل هو :

$$H_1 : \mu < 300$$

أي أن متوسط الدخل لهذه الفئة من المجتمع أقل من 300 جنيلةً شهرياً .

والخلاصة هي لابد للباحث من تحديد الفرض البديل الذي لا يخرج عن أحد الأشكال الثلاثة السابقة، وهذا التحديد مهم جداً قبل الدخول في تفاصيل الاختبار الإحصائي وذلك لأنه هو الذي يحدد نوع الاختبار المستخدم كما سوف نرى.

الخطأ في اتخاذ القرار :

ففي حالة قبول الباحث لفرضه العدمي، فلا مجال للبحث في الفرض البديل، أما في حالة حدوث العكس بمعنى رفض الفرض العدمي فإنه يتحتم في هذه الحالة قبول الفرض البديل، على أنه من الجدير بالذكر أن الباحث هنا عرضة للوقوع في الخطأ عند اتخاذ قراره بقبول الفرض العدمي ؤ رفضه، فقد يرفض فرضاً هو في الواقع صحيح، وقد يقبل فرضا هو في الواقع غير صحيح. لذلك فقد تم تصنيف هذه الأخطاء إلى نوعين هما :

الخطأ من النوع الأول : Type I error

الخطأ من النوع الأول هو "رفض الفرض العدمي بينما هو صحيح ". أي أنه على الرغم من أن الفرض العدمي في الواقع صحيح وكان من الواجب قبوله فقد تم أخذ قرار خاطئ برفضه. وباختصار شديد فإن الخطأ من النوع الأول هو : " رفض فرض صحيح".

الخطأ من النوع الثاني : Type II error

وفي المقابل فإن الخطأ من النوع الثاني يعني " قبول الفرض العدمي بينما هو خاطئ " أي أنه على الرغم من أن الفرض العدمي خاطئ وكان من الواجب رفضه فقد تم أخذ قرار خاطئ بقبوله وباختصار شديد فإن الخطأ من النوع الثاني هو " قبول فرض خاطئ ".

وقد يتساءل البعض عند مدى إمكانية تصغير الخطأين معاً ولكن لسوء الحظ لا يمكن تصغيرهما معاً إلى أدنى حد ممكن، ويبدو أن الطريقة الوحيد ة المتاحة لذلك هي زيادة (أو تكبير) حجم العينة، الأمر الذي قد لا يكون ممكنا في كل الحالات. لذلك فإن الذي يحدث عادة هو تثبيت أحدهما كأن يكون نسبة أو احتمال حدوث الخطأ من النوع الأول ومحاولة تصغير الآخر.

مستوى المعنوية : Level of Significance

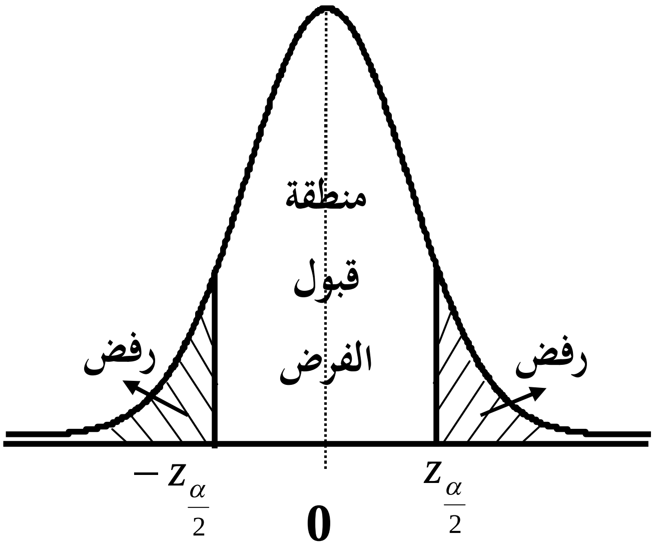
يعتبر مصطلح " مستوى المعنوية " واحدا من أهم المصطلحات المستخدمة في دراسة نظرية اختبارات الفروض. والمقصود بمستوى المعنوية هو " احتمال حدوث الخطأ من النوع الأول ". أو نسبة حدوثه " أي احتمال رفض الفرض العدمي بينما هو صحيح ".

وعادة ما يرمز إلى مستوى المعنوية بالرمز اللاتيني ألفا α وأشهر قيمتين لمستوى المعنوية هما 5%، 1 %، ولكن ليس هناك ما يمنع من أن يأخذ قيما أخرى.

ومن الملاحظات المهمة هنا هو أن " مستوى المعنوية " والذي يسمى أحياناً " مستوى الدلالة " هو المكمل لدرجة الثقة " بمعنى أن مجموعهما يساوي 100% أو واحد صحيح. فإذا كانت درجة الثقة 95% فإن مستوى المعنوية يساوي 5%. والعكس صحيح فإذا كان مستوى المعنوية 5% فإن هذا يعني أن درجة الثقة 95 %. ولعل من أهم الملاحظات هنا هو استخدام تعبير "مستوى المعنوية" في حالات اختبارات الفروض، بينما يستخدم مصطلح "درجة أو مستوى الثقة" في حالات التقدير.

والفكرة الأساسية في اختبار الفرض هي تقسيم المساحة تحت المنحنى إلى منطقتين: أحداهما تسمى " منطقة القبول " أي منطقة قبول الفرض العدمي. والأخرى تسمى " منطقة الرفض"، أي منطقة رفض الفرض العدمي والتي تسمى أحيانا " بالمنطقة الحرجة Critical region ". والنقطة الجديرة بالملاحظة هنا هي أن منطقة القبول تمثل درجة الثقة، بينما تمثل منطقة الرفض مستوى المعنوية. وهناك ثلاث حالات مختلفة لمنطقتي القبول والرفض هي :

الأولى : إذا كان الفرض البديل يأخذ شكل " لا يساوي " كأن يكون الفرض في هذه الحالة مثلاً هو أن متوسط دخل الفرد لا يساوي 300 جنية فإن منطقة الرفض تكون موزعة على طرفي المنحنى بالتساوي، ويسمى الاختبار في هذه الحالة " اختبار الطرفين "، والذي يأخذ الشكل التالي:

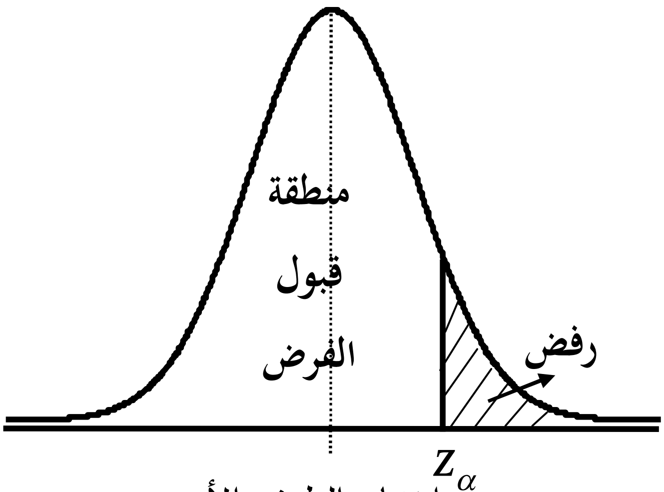


اختبار الطرفين

فالفرض العدمي هنا $H_0 : \mu = 300$ يعني أن متوسط دخل الفرد يساوي 300 جنية شهريا، والفرض البديل في هذه الحالة هو $H_1 : \mu \neq 300$ بمعنى أن متوسط دخل الفرد لا يساوي 300 جنيةشهرياً . حيث تمثل المنطقة البيضاء غير المظللة منطقة القبول والتي قد تساوي درجة الثقة% $(1-\alpha)$ وبالتالي فمنطقة الرفض مقسمة بالتساوي على طرفي المنحنى في هذه الحالة تكون قيمة كل منهما % $\frac{\alpha}{2}$.

والنتيجة هو أن القرار أيا كان نوعه سيكون بمستوى معنوية % α بمعنى أن احتمال أو نسبة الخطأ فيه من النوع الأول تساوي % α.

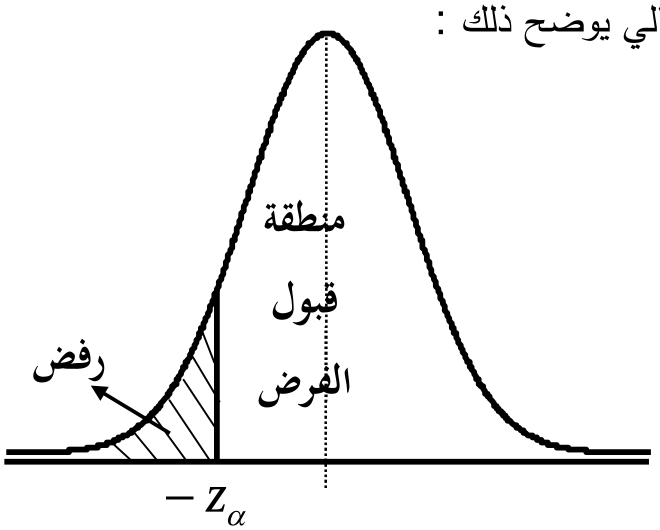
الثانية : إذا كان الفرض البديل يأخذ شكل "أكبر من" فإن منطقة الرفض تكون مركزة بالكامل في الطرف الأيمن للمنحنى. ويسمى الاختبار في هذه الحالة اختبار الطرف الأيمن. والذي يأخذ الشكل التالي أدناه :



اختبار الطرف الأيمن

فالفرض العدمي هنا نفس فرض المثال السابق، بينما الفرض البديل هو $H_1 : \mu > 300$ بمعنى أن متوسط دخل الفرد أكبر من 300 جنية شهرياً . وبالتالي فإن مستوى المعنوية والذي يساوي α% مركز في الطرف الأيمن من المنحنى.

الثالثة : إذا كان الفرض البديل يأخذ شكل " أقل من " فإن منطقة الرفض تكون مركزة بالكامل في الطرف الأيسر للمنحنى. ويسمى الاختبار في هذه الحالة اختبار الطرف الأيسر. والشكل التالي يوضح ذلك :



اختبار الطرف الأيسر

مع افتراض ثبات الفرض العدمي كما في المثال السابق، بينما الفرض البديل هو $H_1 : \mu < 300$ بمعنى أن متوسط دخل الفرد أقل من 300 جنية شهرياً ، وبالتالي فإن مستوى المعنوية والذي يساوي % α مركز في الطرف الأيسر من المنحنى.

وسوف نتناول فيما يلي خطوات الاختبار الإحصائي بشيء من التفصيل.

خطوات الاختبار الإحصائي :

يمكن تلخيص خطوات الاختبار الإحصائي في خمس خطوات كما يلي :

1) وضع الفرض العدمي Ho، والذي يأخذ – عادة – شكل " يساوي " فمثلاً إذا كان المطلوب هو اختبار ما إذا كان متوسط عمر الناخب هو 28 سنة فإن هذا الفرض يصاغ كما يلي :

$$Ho : \mu = 28$$

2) وضع الفرض البديل H1، والذي يأخذ أحد أشكال ثلاثة إما :

" لا يساوي "

أو " أكبر من "

أو " أقل من "

وبالرموز فإن الفرض البديل قد يأخذ شكل أحد الصيغ التالية :

$$H_1 : \mu \neq 28$$

$$OR \mu > 28$$

$$OR \mu < 28$$

والذي يحدد شكل الفرض البديل هو مدى اقتناع الباحث بذلك أو مدى توفر المعلومات الأولية، فمثلاً إذا كانت وجهة نظر الباحث أن متوسط عمر الناخب لا يمكن أن يقل عن 28 سنة فإنه يختار الفرض البديل " أكبر من " والعكس صحيح إذا كان يعتقد أن متوسط عمر الناخب لا يزيد عن 28 سنة فإنه يختار الفرض البديل " أقل من " أما إذا لم يكن لديه أي تصور أو أي معلومات فإنه يختار الفرض البديل " لا يساوي ".

3) إحصائية الاختبار : وهي الإحصائية التي يتم حسابها من بيانات العينة بافتراض أن الفرض العدمي صحيح. ويتوقف شكل الإحصائية على العوامل التالية :

أ- توزيع المجتمع، وهل هو طبيعي أم لا، وهل تباينه معروف أم لا.

ب- وحجم العينة، وهل هو كبير أم صغير.

جـ- والفرض العدمي المراد اختباره وهل هو عن الوسط أو النسبة أو التباين أو الارتباط... الخ.

والفكرة الأساسية (غالباً) في إحصائية الاختبار هي : حساب الفرق بين قيمة المعلمة التي نفترضها للمجتمع (في الفرض العدمي) والقيمة المقابلة لها في العينة أي التابع الإحصائي، ثم نقسم (أو ننسب) هذا الفرق إلى الخطأ المعياري للتابع الإحصائي.فمثلاً : إذا كان الاختبار عن الوسط الحسابي فإنه يتم حساب الفرق بين قيمة الوسط الحسابي للمجتمع التي نفترضها وقيمة الوسط الحسابي للعينة، ثم نقسم هذا الفرق على الخطأ المعياري للوسط. وهكذا مع باقي الإحصائيات. فلو أراد الباحث اختبار فرضية أن متوسط عمر الناخب في دولة ما هو مثلاً 30 سنة ولاختبار مدى صحة هذه الفرضية فإنه عادة ما تسحب عينة عشوائية من المجتمع، ولنفرض أن متوسط عمر الناخب في هذه العينة كان 31 سنة، فالفرق هنا هو سنة واحدة وهو فرق صغير بين الافتراض والعينة الحقيقية فالباحث عادة ما يميل إلى قبول فرضه العدمي.

أما إذا كان متوسط عمر الناخب في العينة مثلاً هو 45 سنة، فالفرق هنا كبير بين الفرض والعينة، ولذا فإن احتمال رفض الفرض العدمي هو احتمال كبير نظراً لكبر الفرق بين قيمة الفرض وقيمة العينة. من هنا نستطيع القول بأن إحصائية الاختبار تعتمد على حساب الفرق بين قيمة الوسط المفترض وقيمة متوسط العينة.

هنا قد يثور تساؤل عن المعيار الذي يستطيع من خلاله الباحث الحكم على هذا الفرق ومدى كبره أو صغره. والإجابة الإحصائية عليه تتم من خلال قسمة هذا الفرق على الخطأ المعياري للوسط، ثم مقارنة خارج القسمة بالقيمة الجدولية أو ما يسمى بحدود منطقتي القبول والرفض كما سوف نرى لاحقاً .

وفيما يلي صيغ الإحصائية لاختبارات الوسط الحسابي للعينات الكبيرة والصغيرة وكذلك للنسبة، ثم نستكمل بعدها خطوات الاختبار الإحصائي.

1 – اختبارات الفروض للوسط الحسابي μ

أ ـ يكون الفرض العدمي في هذه الحالة كالتالي

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

ب ـ يكون الفرض البديل علي إحدى الصور التالية

$a) \quad H_1 : \mu \neq \mu_0 \longrightarrow$ اختبار طرفين (القيمة الجدولية عند $\frac{\alpha}{2}$)

أو

$b) \quad H_1 : \mu > \mu_0 \longrightarrow$ اختبار طرف ايمن (القيمة الجدولية عند α)

أو

$c) \quad H_1 : \mu < \mu_0 \longrightarrow$ اختبار طرف ايسر (القيمة الجدولية عند α)

جـ ـ نقوم بحساب قيمة حسابية يختلف توزيعها حسب الحالات السابق ذكرها في باب التقدير كالتالي

إذا كانت σ معلومة

$$z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

إذا كانت σ مجهولة

$n > 30$

$$z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$n < 30$

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

ى) نوجد القيمة الجدولية من توزيع z أو T حسب شكل التمرين و باستخدام α أو حسب شكل الفرض البديل

هـ) نقوم برسم المخطط و تحديد مناطق القبول و الرفض و اتخاذ القرار

مثال

عينة عشوائية حجمها 49شخصاً اختيرت من أفراد دولة ما، فإذا كان الوسط الحسابي لدخول الأفراد الأسبوعية في العينة هو 90 جنيةً . كيف يمكن اختبار الفرض العدمي بأن متوسط الدخل الأسبوعي لمواطني هذه الدولة يساوي 87 جنيةً مقابل الفرض البديل أنه لا يساوي 87 وذلك بمستوى معنوية % 5 إذا علمت أن الانحراف المعياري لدخول الأفراد يساوي 14 جنيةً .

<u>**الحل**</u>

1- الفرض العدمي : هو أن متوسط المجتمع يساوي 87 وبالرموز :

$$H_0 : \mu = 87$$

2- الفرض البديل : هو أن المتوسط لا يساوي 87 وبالرموز :

$$H_1 : \mu \neq 87$$

3- الإحصائية : بما أن العينة كبيرة فإن الإحصائية في حالة اختبار الوسط تأخذ الشكل التالي :

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

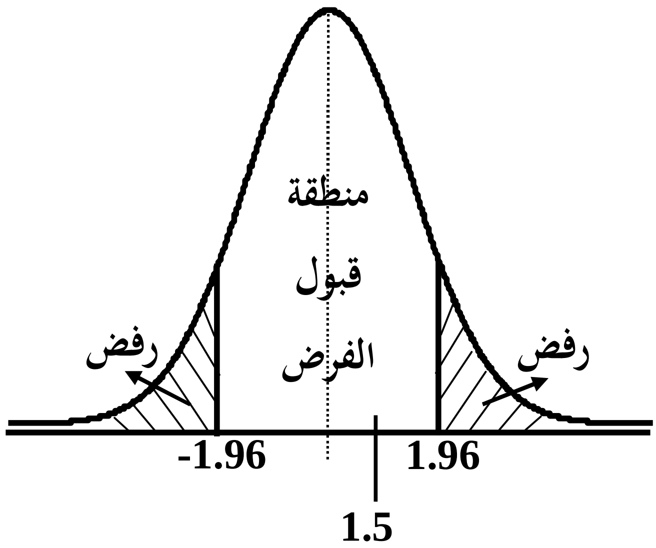
حيث $n = 49, \sigma = 14, \overline{X} = 75, \mu = 72$

وبالتعويض نحصل على :

$$Z = \frac{75 - 72}{\frac{14}{\sqrt{49}}} = \frac{3}{\frac{4}{7}} = \frac{3}{2} = 1.5$$

أي أن قيمة الإحصائية تساوي 1.5

4- حدود منطقتي القبول والرفض : نحصل عليها من التوزيع الطبيعي المعياري حيث مستوى المعنوية 5% وبما أن الفرض البديل هو :" لا يساوي " فإن ما يستخدم في هذه الحالة هو اختبار الطرفين كما في الشكل التالي :



وقد حصلنا على حدود منطقتي القبول والرفض وذلك بقسمة درجة الثقة (المكملة لمستوى المعنوية) والتي تساوي 0.95 على 2 فنحصل على 0.4750 وبالكشف في جدول التوزيع الطبيعي المعياري عن Z التي تقابل المساحة 0.4750 نجد أنها تساوي 1.96 وحيث أنها موزعة على طرفي المنحنى بالتساوي فنضع إشارة موجبة في النصف الأيمن، وإشارة سالبة في النصف الأيسر، أي أن منطقة القبول تبدأ من القيمة 1.96- وتستمر حتى القيمة 1.96 + (أي أن أي قيمة محصورة بين هاتين القيمتين تكون في منطقة القبول، وأي قيمة خارج هذه الحدود تكون في منطقة الرفض).

5- المقارنة والقرار : وبمقارنة قيمة الإحصائية المحسوبة من الخطوة رقم 3 (والتي تساوي 1.5) بحدود منطقتي القبول والرفض (من الخطوة رقم 4) نجد أنها تقع في منطقة القبول لذلك فإن القرار هو :

قبول الفرض العدمي بأن متوسط دخول الأفراد الأسبوعية في هذه الدولة يساوي 87 جنيهاً وذلك بمستوى معنوية % 5.

مثــال

إذا سحبت عينة مكونة من 100 عامل في إحدى الشركات و حسب متوسط الإنتاجية اليومية للعامل في العينة فوجدت 28 وحدة منتجة فإذا كان التباين لإنتاجية العامل في هذه الشركة $\sigma^2 = 25$

اختبر الفرض القائل بأن متوسط إنتاجية العامل اليومية في هذه الشركة تزيد عن 30 وحدة يومياً بدرجة ثقة 95%

1) نفرغ معطيات التمرين

$$n = 100 \quad , \quad \bar{X} = 28 \quad , \quad \sigma^2 = 25 \Rightarrow \sigma = \sqrt{25} = 5$$

$$1 - \alpha = 0.95 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0.05$$

يكون الفرض العدمي كالتالي

$$H_0 : \mu = 30$$

لاحظ انه ذكر في المثال كلمة يزيد عن و بالتالي يكون الفرض البديل هو

$$H_1 : \mu > 30$$

2) لاحظ أن σ معلومة و بالتالي فأن القيمة الجدولية تحسب كالتالي

و الفرض البديل يحتوي على علامة (اكبر من) وبالتالي الجدولية هى $\alpha = 0.05$

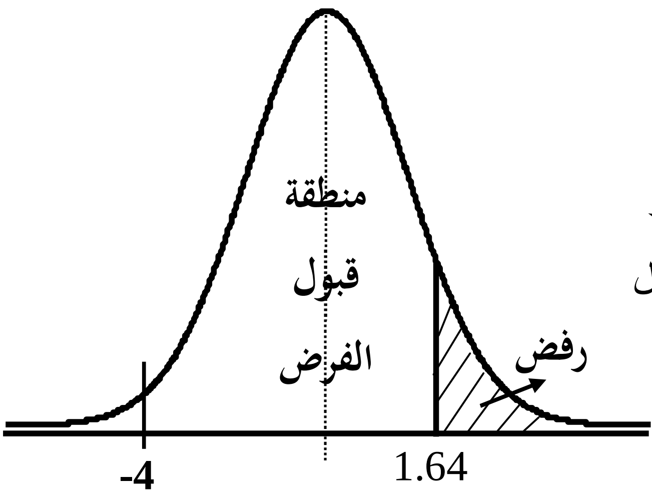
3) تحديد القيمة الجدولية

$$z_\alpha = z_{0.05} = 1.64$$

4) نحسب القيمة المحسوبة z من العلاقة التالية

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{28 - 30}{\frac{5}{\sqrt{100}}} = -4$$

نقوم برسم الفرض وتحديد مناطق القبول و الرفض



نقوم برسم الفرض وتحديد مناطق القبول و الرفض ومن الرسم نلاحظ أن Y المحسوبة تقع في منطقة القبول

اتخاذ القرار

∴ نقبل الفرض العدمي القائل أن المتوسط يساوي 30 و نرفض الفرض البديل القائل أن المتوسط اكبر من 30

مثـــــال

إذا كان متوسط الأجر الأسبوعي للعاملين بأحد المصانع للملابس الجاهزة يتوزع طبيعياً بانحراف معياري 15 جنية و سحبت عينة من 49 عاملا و حسب الوسط الحسابي لها فكان 100 جنية في الأسبوع .

اختبر الفرض القائل أن متوسط الأجر الأسبوعي للعامل يساوي 120 وذلك عند درجة ثقة 99%

1) نفرغ معطيات التمرين

$$n = 49 \quad , \quad \overline{X} = 100 \quad , \quad \sigma = 15$$

$$1 - \alpha = 0.99 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0.01$$

يكون الفرض العدمي كالتالي

$$H_0 : \mu = 120$$

لاحظ انه لم ذكر في المثال كلمة يزيد عن أو اقل من و بالتالي يكون الفرض البديل

$$H_1 : \mu \neq 120$$

2) لاحظ أن σ معلومة و بالتالي فأن القيمة الجدولية تحسب كالتالي

$\alpha = 0.01$ و الفرض البديل يحتوي على علامة (لايساوى) وبالتالي الجدولية هى

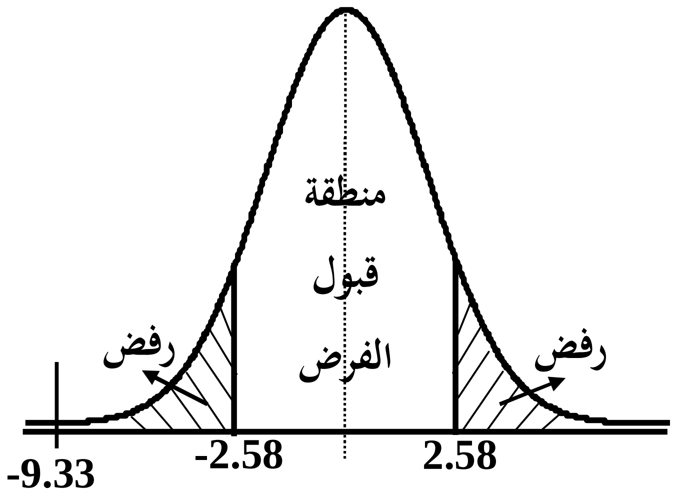
3) تحديد القيمة الجدولية

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.005} = 2.58$$

4) نحسب بعد ذلك قيمة z من العلاقة التالية

$$z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{100 - 120}{\frac{15}{\sqrt{49}}} = -9.33$$

نقوم برسم الفرض وتحديد مناطق القبول و الرفض



نقوم برسم الفرض وتحديد مناطق القبول و الرفض ومن الرسم نلاحظ أن Yالمحسوبة تقع في منطقة الرفض

5) اتخاذ القرار

∴ نرفض الفرض العدمي القائل أن المتوسط يساوي 120 و نقبل الفرض البديل القائل أن المتوسط لا يساوي 120

مثـــــال

سحبت عينـة مكونـة من 9 طـلاب وحسب الوسط الحسابي و الانحراف المعيـاري لدرجـة الطالب في مادة الإحصاء في العينة فوجد $\overline{X}=8$ و $S=3$

اختبر الفرض القائل أن متوسط درجة الطالب في الإحصاء في المجتمع المسحوب منة العينة اقل من 6.5 بدرجة ثقة 95%

1) نفرغ معطيات التمرين

$$n=9<30 \qquad , \quad \overline{X}=8 \qquad , \quad S=3$$

$$1-\alpha = 0.95 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0.05$$

يكون الفرض العدمي كالتالي

$$H_0 : \mu = 6.5$$

لاحظ انه ذكر في المثال كلمة اقل من و بالتالي يكون الفرض البديل هو

$$H_1 : \mu < 6.5$$

2) لاحظ أن σ مجهولة و بالتالي فأن القيمة الجدولية تحسب كالتالي

$\alpha = 0.01$ و الفرض البديل يحتوي على علامة (اقل من) وبالتالي الجدولية هى

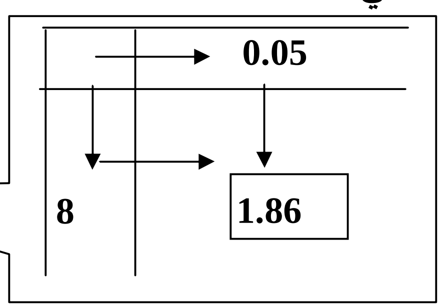
3) تحديد القيمة الجدولية

لاحظ أن σ مجهولة و $n < 30$ و بالتالي فإن القيمة الجدولية توجد عند α من جدول T كالتالي

$$n-1=9-1=8 \qquad , \quad \alpha = 0.05$$

ومن جدول (T) و عند البحث نجد أن

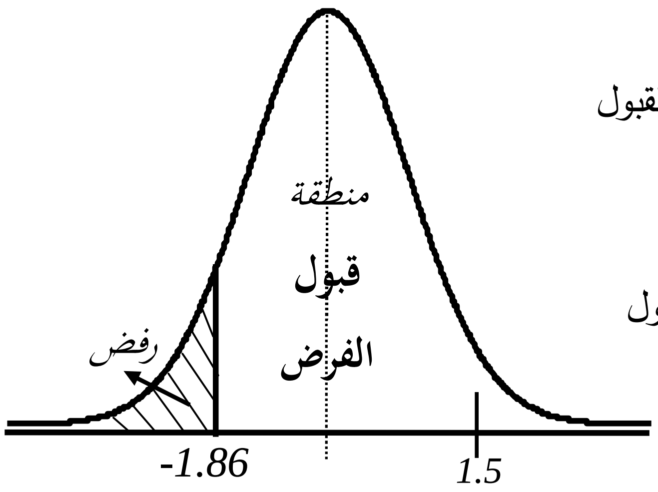
$$T_{[\alpha,(n-1)]} = T_{(0.05,8)} = 1.86$$



4)نحسب بعد ذلك قيمة T من العلاقة التالية

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{8 - 6.5}{\frac{3}{\sqrt{9}}} = 1.5$$

نقوم برسم الفرض وتحديد مناطق القبول و الرفض



نقوم برسم الفرض وتحديد مناطق القبول

و الرفض ومن الرسم نلاحظ

أن T المحسوبة تقع في منطقة القبول

5) اتخاذ القرار

∴ نقبل الفرض العدمي القائل أن المتوسط يساوي 6.5 و نرفض الفرض البديل القائل أن المتوسط اقل من 6.5

2 – اختبار الفروض للنسبة في المجتمع

أ ـ يكون الفرض العدمي في هذه الحالة كالتالي

$H_0 : P = P_0$ حيث θ_0 معطى بالتمرين

ب ـ يكون الفرض البديل علي إحدى الصور التالية

$a) \quad H_1 : P \neq P_0 \longrightarrow$ اختبار طرفين (القيمة الجدولية عند $\frac{\alpha}{2}$)

أو

$b) \quad H_1 : P > P_0 \longrightarrow$ اختبار طرف ايمن (القيمة الجدولية عند α)

أو

$c) \quad H_1 : P < P_0 \longrightarrow$ اختبار طرف ايسر (القيمة الجدولية عند α)

ب- نوجد القيمة الجدوليه من توزيع Z و باستخدام α أو $\frac{\alpha}{2}$ حسب شكل الفرض البديل

ج - نقوم بحساب قيمة حسابية من توزيع Z كالتالي

$$\boxed{Z = \frac{\hat{P} - P}{\sigma_{\hat{p}}} = \frac{\hat{P} - P}{\sqrt{\frac{Pq}{n}}}}$$

مثـــــال

يزعم أحد المسئولين بوزارة الاتصالات أن ما تزيد نسبته عن 75% من الشباب فى سن المراهقة يستخدمون الانترنت لمدة تزيد عن 10 ساعات فى الأسبوع . وللتحقق من هذا الادعاء تم اختيار عينة من 225 من الشباب فى المراهقة فوجد أن من بينهم 180 شاب يستخدم الإنترنت أكثر من 10 ساعات فى الأسبوع .

هل تؤيد بيانات هذه العينه بهذا الادعاء بمستوى معنوية 10% ثم أوجد P-value لهذا الاختبار

الحـل

$$n = 225 \qquad , \quad X = 180 \qquad , \quad \hat{P} = \frac{180}{225} = 0.8$$

1 - يكون الفرض الأصلي كالتالي

$$H_0 : p \leq 0.75$$

لاحظ انه ذكر في المثال كلمة يزيد عن و بالتالي يكون الفرض البديل هو

$$H_1 : p > 0.75$$

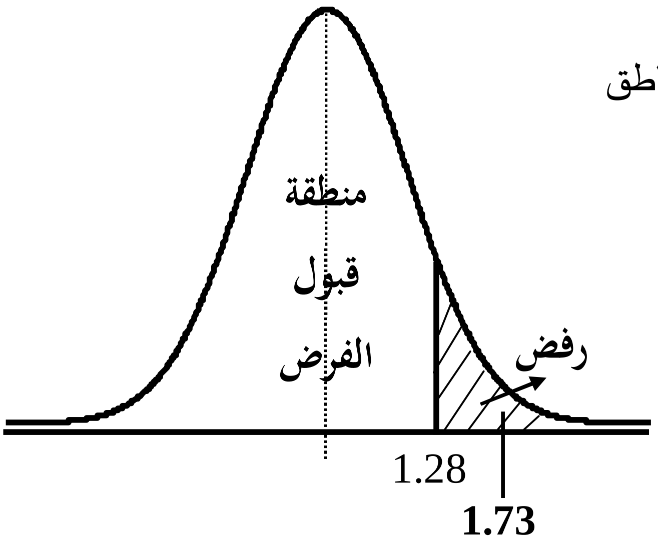
القيمة الجدولية توجد عند α [لان الاختبار ذو جانب واحد] و من الجدول الطبيعي Z كالتالي

$$\alpha = 0.10 \quad \Rightarrow \quad Z_\alpha = Z_{0.10} = 1.28$$

2 - نحسب بعد ذلك قيمة احصاء الاختبار (Z) من العلاقة التالية

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sigma_{\hat{p}}} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{0.80 - 0.75}{\sqrt{\frac{0.75 \times 0.25}{225}}} = 1.73$$

3 – نقوم برسم الفرض وتحديد مناطق القبول و الرفض



4- اتخاذ القرار

من الرسم نلاحظ أن Z تقع في منطقة الرفض و بالتالي نرفض الفرض الأصلي و نقبل الفرض البديل

مثـــــال

محل للوجبات السريعة يعلن أن 90% من الطلبات تسلم فى خلال 10دقائق من بداية الطلب . فى عينه من 100 طلب اتضح أن 84 طلب تم تسليمها خلال المدة الزمنية . وباستخدام مستوى معنوية 10% هل يمكن أن نستنتج أن أقل من90% من الطلبات يمكن تسليمها للعملاء فى أقل من 10 دقائق

الحـل

$$\boldsymbol{n = 100 \quad , \quad X = 84 \quad , \quad \hat{P} = \frac{84}{100} = 0.84}$$

1 - يكون الفرض الأصلي كالتالي

$$\boldsymbol{H_0 : p \geq 0.90}$$

لاحظ انه ذكر في المثال كلمة اقل من و بالتالي يكون الفرض البديل هو

$$\boldsymbol{H_1 : p < 0.90}$$

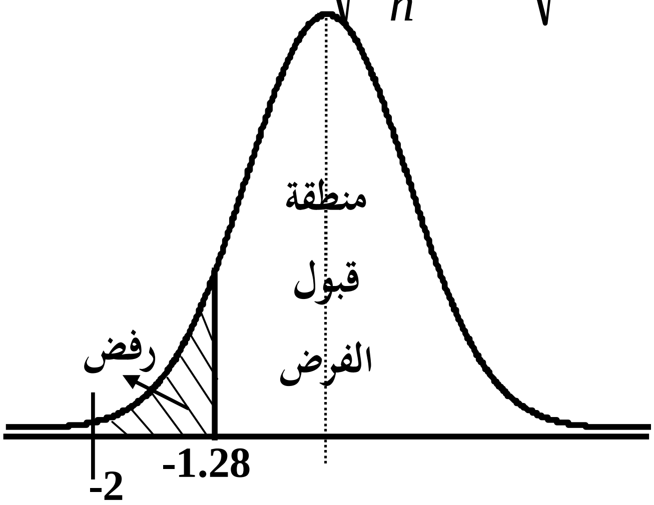
القيمة الجدولية توجد عند α [لان الاختبار ذو جانب واحد] و من الجدول الطبيعي Z كالتالي

$$\alpha = 0.10 \quad \Rightarrow \quad Z_{\alpha} = Z_{0.10} = 1.28$$

2- نحسب بعد ذلك قيمة احصاء الاختبار (Z) من العلاقة التالية

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sigma_{\hat{p}}} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{0.84 - 0.90}{\sqrt{\frac{0.90 \times 0.10}{100}}} = -2$$

3– نقوم برسم الفرض وتحديد مناطق القبول و الرفض



4- اتخاذ القرار

من الرسم نلاحظ أن Z تقع في منطقة الرفض و بالتالي نرفض الفرض الأصلي و نقبل الفرض البديل

تمارين الفصل الثالث

1) يدعى احد المسئولين عن موقع معين على شبكة الانترنت بأن متوسط عدد ساعات زيارة هذا الموقع فى الاسبوع تزيد عن 20 ساعه للفرد الواحد . ولاختبار هذا الادعاء اختيرت عينه مكونه من 100 من مستخدمى هذا الموقع فوجد أن متوسط ساعات زيارة هذا الموقع 22 ساعه بانحراف معيارى 9.5 ساعه . هل تؤيد بيانات هذه العينة إدعاء المسئول عن الموقع ؟ (إستخدام مستوى معنوية 5%).

2) مصنع لانتاج الأجهزة الكهربائية ينتج فى المتوسط 200 خلاط كهربائي في الأسبوع . اذا كان إنتاج هذه الخلاطات يتبع التوزيع الطبيعى بانحراف معيارى 16 جهاز .ونظراً لسياسة التوسع فى الإنتاج فى العام الماضى أراد مدير البحوث بالمصنع معرفة ما اذا كان هناك تغير فى متوسط الانتاج الأسبوعى بدرجة دقة مرتفعة مستخدماً مستوى معنويه 1% . من هذه المعلومات هل تعتقد أن هناك تغير فى متوسط الانتاج الاسبوعى اذا علمت أن المصنع كان يعمل لمدة 50 اسبوع فى العام الماضى وأن متوسط الانتاج الأسبوعى كان204 خلاط كهربائى

3) سحبت عينة عشوائية مكونة من 100 شخص فكانت نسبة المدخنين في العينة 56% اختبر الفرض القائل بأن نسبة المدخنين في المجتمع المسحوب منة العينة أقل من 50% وذلك عند مستوي معنوية 5%

4) في الاختبارات اليومية لقياس جودة الوحدات المنتجة في أحد المصانع أخذت عينة مكونة من 400 وحدة وبفحص كل وحدة في العينة وجد أن عدد الوحدات غير المطابقة للمواصفات 60 وحدة . اختبر الفرض القائل أن نسبة الوحدات غير المطابقة للموصفات في المصنع اكبر من 10% و ذلك بدرجة ثقة 99%

5) من بيانات تعداد احدي لمدن في عام 1995 وجد ان متوسط عدد افرادالاسرة 3.19 فرد وبعد فترة معينة من تنفيذ حملة لتنظيم الاسرة تنظمها وزارة الصحة والسكان اراد احد الباحثين ان يختبر مدي نجاح هذه الحملة في خفض متوسط عدد افراد الاسرة عن 3.19 فرد فقام بسحب غينة من 900 اسرة فوجد ان متوسط عدد افراد الاسرة 3.15 فرد

بانحراف معياري 0.8 فرد .هل يمكن استنتاج نجاح حملة تنظيم الاسرة باستخدام مستوي معنوية 5%.

6) مصنع ينتج نوع معين من المعلبات الغذائية متوسط وان العبوة 500 جرام ولقد طلب صاحب المصنع من المسئول عن الجودة الاطمئنان علي متوسط وزن العبوة حيث انه يعتقد أن الوزن اكتر من 500 جرام لذلك قام المسئول عن الجودة بهذا المصنع بسحب عينة من 50 عبوة من هذا المنتج فوجد أن متوسط وزن العبوة 505 جرام بانحراف معياري 15 جرام باستخدام مستوي معنوية 5% هل يمكن القول أن ادعاء صاحب المصنع صحيح.

7) شركة لانتاج البرمجيات طرحت برنامجا جديد في الأسواق وتدعي الشركة أن البرنامج يمكن تعلمه في اقل من ¾ ساعة وللتحقق من هذا الدعاء تم اختيار عينة مكونة من 15طالب بإحدى الجامعات والبيان التالي يبين الوقت بالدقائق الذي استغرقه كل طالب حتى يتعلم البرنامج بنفسه

30 38 40 50 25 65 25 35 52 55 45 30 50 60 42

والمطلوب

أ – باستخدام 5% مستوي معنوية اختبر ادعاء هذه الشركة

ب – قدر فترة ثقة 10% لمتوسط الوقت اللازم لتعليم البرنامج

8) من الخبرة السابقة لاحدي شركات السياحة الأوربية تبين أن نسبة 45% من السياح يرغبون في زيارة مصر وفي الموسم السياحي وجد أن 550 من السياح من بين 1000 سائح كعينة يرغبون في زيارة مصر هل تعتقد من هذه المعلومات أن نسبة الذين يرغبون في زيارة مصر في تزايد؟ أستخدم مستوي معنوية 5%.

الفصل الرابع
اختبارات الفروض الإحصائية لعينتين

في هذا الفصل نقوم بعمل مقارنات إحصائية لأكثر من مجتمع و ذلك باستخدام عينات من هذه المجتمعات و لذلك في كل مقارنة سوف نحدد كيفية أجراء اختبارات الفروض و أيضاً كيفية حساب فترات الثقة لكل حالة كالتالي

اختبارات الفروض للفرق بين متوسطي مجتمعين مستقلين

أ - يكون الفرض الأصلي في هذه الحالة كالتالي

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$

ب - يكون الفرض البديل علي إحدى الصور التالية

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

اختبار طرفين (القيمة الجدولية عند $\frac{\alpha}{2}$)

أو

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$$

اختبار طرف ايمن (القيمة الجدولية عند α)

أو

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0$$

اختبار طرف ايسر (القيمة الجدولية عند α)

ج - نقوم بحساب قيمة حسابية يختلف توزيعها حسب الحالات كالتالي

إذا كانت σ_1, σ_2 معلومين

$$Z^* = \frac{\left[\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right] - \left[\mu_1 - \mu_2\right]}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}$$

حيث أن

$$\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

وتكون فترة الثقة للفرق كالتالي

$$\left[\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right] \mp Z_{\alpha/2}\, \sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$$

إذا كانت σ_1, σ_2 مجهولة

$n_1, n_2 \geq 30$

$$Z^* = \frac{\left[\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right] - \left[\mu_1 - \mu_2\right]}{S_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}$$

حيث أن

$$S_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

وتكون فترة الثقة للفرق كالتالي

$$\left[\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right] \mp Z_{\alpha/2}\, S_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$$

$n_1, n_2 < 30$

$$t^* = \frac{\left[\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right] - \left[\mu_1 - \mu_2\right]}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

حيث أن S_P هو الانحراف المشترك و هو جذر التباين المشترك و يحسب كالتالي

$$S_P = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

وتكون فترة الثقة للفرق كالتالي

$$\left[\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right] \mp t_{(\alpha/2);df}\, S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

حيث أن المقدار $n_1 + n_2 - 2$ هو درجة الحرية **d.f** التي سوف نستخدمها للبحث عن **t** الجدولية

مثـــــال

شركة بيع الملابس الجاهزة لديها فروع بالمحافظات المختلفة و يرغب مدير التسويق في دراسة حجم مبيعات فرعي القاهرة و طنطا باعتبارهما من أكبر فروع هذه الشركة . ولقد تم اختيار عينة من 35 يوم من مبيعات فرع القاهرة فوجد أن متوسط حجم المبيعات اليومي 53700 جنية بانحراف معياري 3000 جنية . وعينة أخرى من 30 يوم من مبيعات فرع طنطا فوجد أن متوسط حجم المبيعات اليومي 51500 بانحراف معياري 3100 جنية. و المطلوب :

أ) تكوين فترة ثقة 95% لمتوسط الفرق بين مبيعات فرع القاهرة و فرع طنطا.

ب)اختبار ما إذا كان هناك فرق يعتد به إحصائياً بين متوسط مبيعات فرعي القاهرة و طنطا باستخدام مستوى معنوية 1%.

الحـل

فرع طنطا	فرع القاهرة
$n_2 = 30$	$n_1 = 35$
$S_2 = 3100$	$S_1 = 3000$
$\bar{X}_2 = 51500$	$\bar{X}_1 = 53700$

$$1 - \alpha = 0.95 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0.05$$

أ) نلاحظ أن σ_1, σ_2 **مجهولين و** $n_1, n_2 \geq 30$ **تكون فترة الثقة هي**

$$\left[\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right] \mp Z_{\alpha/2}\, S_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$$

و نقوم بإيجاد القيمة الجدوليه من القيم المفروض حفظها بالجدول السابق كالتالي

$$\alpha = 0.05 \quad \Rightarrow \quad Z_{\alpha/2} = 1.96$$

ونقوم بحساب $S_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$ **كالتالي**

$$S_{\overline{X}_1-\overline{X}_2}=\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}=\sqrt{\frac{(3000)^2}{35}+\frac{(3100)^2}{30}}=759.918$$

وبالتعويض في فترة الثقة نجد أن

$$\left[\overline{X}_1-\overline{X}_2\right]\mp Z_{\alpha/2}\,S_{\overline{X}_1-\overline{X}_2}$$

$$=(53700-51500)\pm1.96(759.918)$$

$$=2200\pm1489.44$$

$$(710.56\leq\mu_1-\mu_2\leq3689.44)$$

معنى هذه الفترة هو أن الفرق بين متوسطى المجتمع يتراوح بين **710.56** و **3689.44** و ذلك باحتمال قدره **95%**

ب) اختبار جوهرية الفرق بين المتوسطين

يكون الفرض الأصلي كالتالي

$$H_0:\mu_1-\mu_2=0$$

لاحظ انه لم ذكر اكبر أو اصغر من و بالتالي يكون الفرض البديل هو

$H_1:\mu_1-\mu_2\neq0$ $\Longrightarrow$ الاختبار ذو جانبين

القيمة الجدولية توجد عند $\alpha/2$ **[**لان الاختبار ذو جانبين**]** و من الجدول الطبيعي **Z** كالتالي

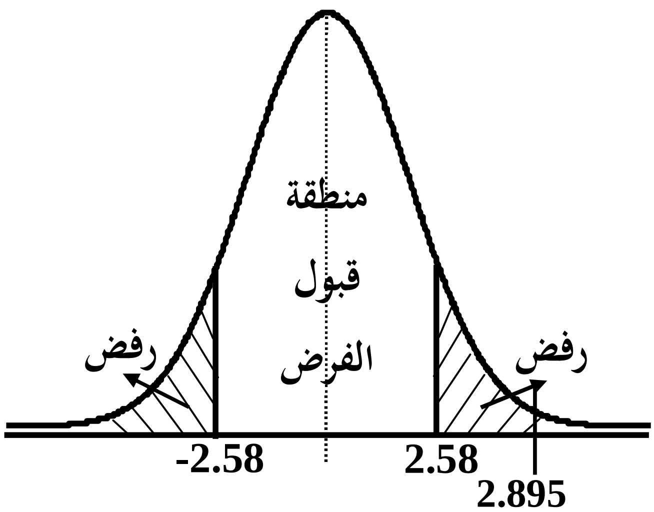
$$\boldsymbol{\alpha=0.01\quad\Rightarrow\quad Z_{\alpha/2}=Z_{0.005}=2.58}$$

3 - نحسب بعد ذلك قيمة إحصاء الاختبار **(** Z^* **)**من العلاقة التالية

$$Z^*=\frac{\left[\overline{X}_1-\overline{X}_2\right]-\left[\mu_1-\mu_2\right]}{S_{\overline{X}_1-\overline{X}_2}}=\frac{(53700-51500)-(0)}{759.918}$$

$$=2.895$$

4 – نقوم برسم الفرض وتحديد مناطق القبول و الرفض



5- اتخاذ القرار

 # من الرسم نلاحظ أن Z^* تقع في منطقة الرفض و بالتالي نرفض الفرض الأصلي و نقبل الفرض البديل

مثـال

ترغب إدارة التسويق في عمل دراسة لمعرفة ما إذا كانت مشتريات العملاء من الذكور اقل من مشتريات العملاء من الإناث و ذلك بأحد محلات السوبر ماركت . و للتحقق من ذلك تم اختيار عينة من 25 من العملاء الذكور فوجد أن متوسط مشترياتهم في المرة الواحدة يبلغ 73 جنية بانحراف معياري 17.5 جنية . و كذلك تم اختيار عينة من 20 من العملاء الإناث فوجد أن متوسط مشترياتهم في المرة الواحدة يبلغ 87 جنية بانحراف معياري 14.4 جنية. و بافتراض أن مشتريات كل من الذكور و الإناث تتبع التوزيع الطبيعي بانحراف معياري غير معلوم و لكن يمكن افتراض انه متساوي .

المطلوب:

أ) تقدير فترة ثقة للفرق بين متوسط مشتريات الذكور و الإناث من هذا السوبر ماركت باستخدام مستوى ثقة 99%.

ب) اختبر الفرض الأخصائي أن متوسط مشتريات الذكور اقل من مشتريات الإناث باستخدام مستوى معنوية 5%.

الحـل

مشتريات الإناث	مشتريات الذكور
$n_2 = 20$	$n_1 = 25$
$S_2 = 14.4$	$S_1 = 17.5$
$\overline{X}_2 = 87$	$\overline{X}_1 = 73$

$$1-\alpha = 0.99 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 0.01$$

أ) نلاحظ أن σ_1, σ_2 **مجهولين و** $n_1, n_2 < 30$ **ي تكون فترة الثقة هي**

$$\left[\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right] \mp t_{(\alpha/2);df}\ S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

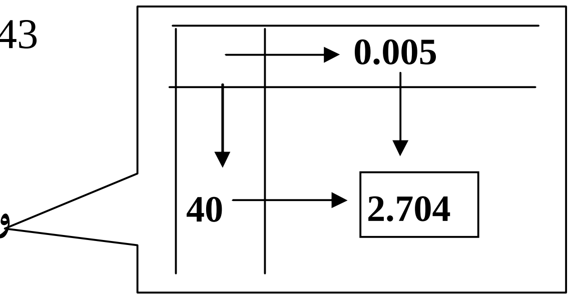
و نقوم بإيجاد القيمة الجدوليه من جدول t كالتالي

$$n_1 + n_2 - 2 = 25 + 20 - 2 = 43$$

$$, \quad \frac{\alpha}{2} = 0.005$$

ومن جدول (t) و عند البحث نجد أن

$$= t_{(0.005,40)} = 2.704$$



لاحظ أننا بحثنا عن القيمة 40 بالجدول لأنها اقرب قيمة لـ43 حيث لا توجد بالجدول القيمة 43

ونقوم بحساب S_p **كالتالي**

$$S_P = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}} = \sqrt{\frac{24\times(17.5)^2 + 19(14.4)^2}{43}}$$

$$= 16.203$$

وبالتعويض في فترة الثقة نجد أن

$$\left[\overline{X}_1-\overline{X}_2\right]\mp t_{(\alpha/2);df}\ S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

$$=(73-87)\pm 2.704\left(16.203\times\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{1}{20}}\right)$$

$$=-14\pm 13.14$$

$$\left(-24.14\le \mu_1-\mu_2\le -0.86\right)$$

ب) اختبار الفرض الأخصائي أن متوسط مشتريات الذكور اقل من مشتريات الإناث

يكون الفرض الأصلي كالتالي

$$H_0:\mu_1-\mu_2=0$$

لاحظ انه ذكر بالتمرين كلمة اقل من و بالتالي يكون الفرض البديل هو

$$H_1:\mu_1-\mu_2<0 \quad \Longrightarrow$$ **الاختبار ذو جانب**

فأن القيمة الجدولية توجد عند α **[لان الاختبار ذو جانب] و من جدول t كالتالي**

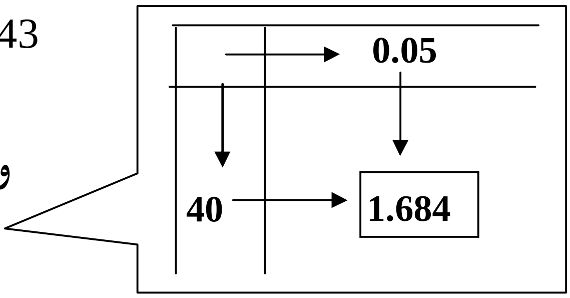
و نقوم بإيجاد القيمة الجدوليه من جدول t كالتالي

$$n_1+n_2-2=25+20-2=43$$

$$,\quad \alpha=0.05$$

ومن جدول (t) و عند البحث نجد أن

$$=t_{(0.05,40)}=1.684$$



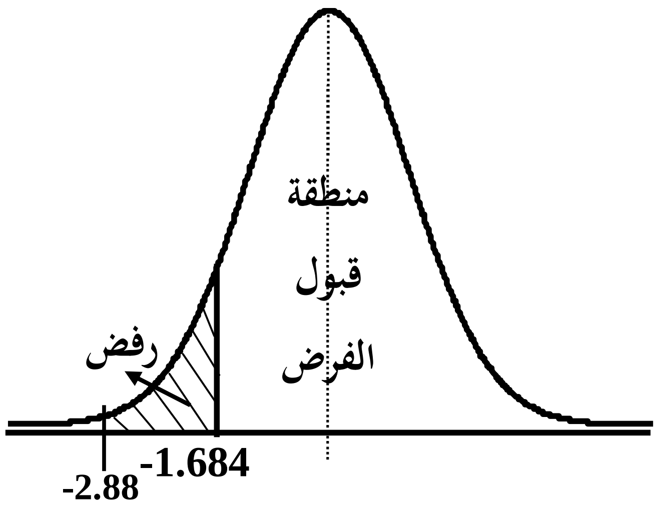
لاحظ أننا بحثنا عن القيمة 40 بالجدول لأنها اقرب قيمة لـ43 حيث لا توجد بالجدول القيمة 43

3 - نحسب بعد ذلك قيمة إحصاء الاختبار (t^*)من العلاقة التالية

$$t^*=\frac{\left[\overline{X}_1-\overline{X}_2\right]-\left[\mu_1-\mu_2\right]}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}=\frac{(73-87)-(0)}{16.203\times\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{1}{20}}}$$

$$=-2.88$$

4 – نقوم برسم الفرض وتحديد مناطق القبول و الرفض



5- اتخاذ القرار

 # من الرسم نلاحظ أن t^* تقع في منطقة الرفض و بالتالي نرفض الفرض الأصلي و نقبل الفرض البديل

مثـــــال

في دراسة لمتوسط إنفاق الأسرة علي التعليم في الريف وفي الحضر تم اختيار عينة من 10 اسر من إحدى القرى وعينة أخري من إحدى المدن وسجلت البيانات التالية والتي تمثل قيمة المبالغ التي أنفقتها كل أسرة في العام الماضي علي التعليم بالجنيه

رقم الاسرة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
الريف	200	300	250	350	180	220	400	500	420	520
الحضر	400	500	300	250	320	700	660	800	410	620

والمطلوب

بافتراض ان حجم الانفاق علي التعليم يتوزع طبيعيا وان البيانات متجانسة

أ) كون فترة ثقة 95% للفرق بين متوسطي حجم الانفاق علي التعليم بواسطة الأسرة في الريف وفي الحضر

ب) هل تعطي هذه البيانات دليلا كافيا علي ان متوسط حجم الانفاق علي التعليم في الحضر اكبر منه في الريف ؟ استخدم مستوي معنوية 10%

ج) احتبر الفرض القائل بان متوسط انفاق الاسرة علي التعليم في الريف يقل عن 300 جنيه

الحـل

الحضر	**الريف**
$n_2 = 10$	$n_1 = 10$
$S_1 = 123.4$	$S_2 = 189.4$
$\bar{X}_2 = 496$	$\bar{X}_1 = 334$

$$1-\alpha = 0.90 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 0.1$$

أ) نلاحظ أن σ_1, σ_2 **مجهولين و** $n_1, n_2 < 30$ **ي تكون فترة الثقة هى**

$$\left[\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right] \mp t_{(\alpha/2);df}\ S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

و نقوم بإيجاد القيمة الجدوليه من جدول t كالتالي

$$n_1 + n_2 - 2 = 10 + 10 - 2 = 18$$

$$,\quad \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

ومن جدول (t) و عند البحث نجد أن

$$t_{(0.025,18)} = 2.101$$

ونقوم بحساب S_p **كالتالي**

$$S_P = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}} = \sqrt{\frac{9\times(123.4)^2 + 9(189.4)^2}{18}}$$

$$= 159.8$$

وبالتعويض في فترة الثقة نجد أن

$$\left[\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right] \mp t_{(\alpha/2);df}\ S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

$$= (334 - 496) \pm 2.101\left(159.8 \times \sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}\right)$$
$$= -162 \pm 150.14$$
$$\left(-312.15 \le \mu_1 - \mu_2 \le -11.86\right)$$

ب) اختبار الفرض الأحصائي

يراد اختبار أن $\mu_2 > \mu_1$ **أي ان** $\mu_2 - \mu_1 > 0$ **وبضرب المتباينة في سالب تعكس الترتيب و تعكس علامة التباين أي ان** $\mu_1 - \mu_2 < 0$

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < 0 \quad \Longrightarrow$$ **الاختبار ذو جانب**

فأن القيمة الجدولية توجد عند α **[لان الاختبار ذو جانب] و من جدول t كالتالي**

و نقوم بإيجاد القيمة الجدوليه من جدول t كالتالي

$$n_1 + n_2 - 2 = 10 + 10 - 2 = 18$$
$$, \quad \alpha = 0.1$$

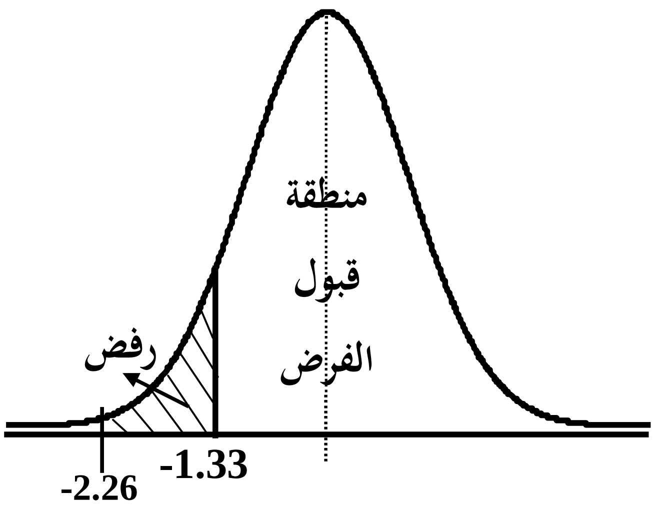
ومن جدول (t) و عند البحث نجد أن

$$= t_{(0.1,18)} = 1.330$$

3 - نحسب بعد ذلك قيمة إحصاء الاختبار (t^*)من العلاقة التالية

$$t^* = \frac{\left[\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right] - \left[\mu_1 - \mu_2\right]}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} = \frac{(334-496)-(0)}{159.8\times\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}}}$$
$$= -2.26$$

4 – نقوم برسم الفرض وتحديد مناطق القبول و الرفض



5- اتخاذ القرار

 # من الرسم نلاحظ أن t^* تقع في منطقة القبول و بالتالي نقبل الفرض الأصلي

مثـــــال

أحـد مواقـع الإنترنـت يبـين في دراسـة أعـدها علـي نوعيـة طـلاب الجامعـات الـذين يستخدمون الانترنيتأن طـلاب كليات التجـارة اكثر استخداما للإنترنـت مـن طـلاب كليـة هندسـة وذلـك بنـاء علي عينـة مـن 500 طالـب بكليـة التجـارة وعينـة أخـرى مـن 480 طالب من كلية الهندسة وقد بينت الدراسة أن متوسط عدد ساعات استخدام الإنترنـت لطالـب كليـة التجـارة 30 سـاعة في أسبوع بانحراف معيـاري 5 سـاعات بينمـا متوسـط عـدد سـاعات اسـتخدام الإنترنـت لطالـب كليـة الهندسـة 28 سـاعة بانحـراف معياري 6 ساعات هل تؤيد هذه البيانات ادعاء هذا الموقع ؟ استخدم مستوي معنوية %5

الحــل

كلية الهندسة	**كلية التجارة**
$n_2 = 480$	$n_1 = 500$
$S_2 = 6$	$S_1 = 5$

$\bar{X}_1 = 30$ $\bar{X}_2 = 28$

$1-\alpha = 0.95 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0.05$

يكون الفرض الأصلي كالتالي

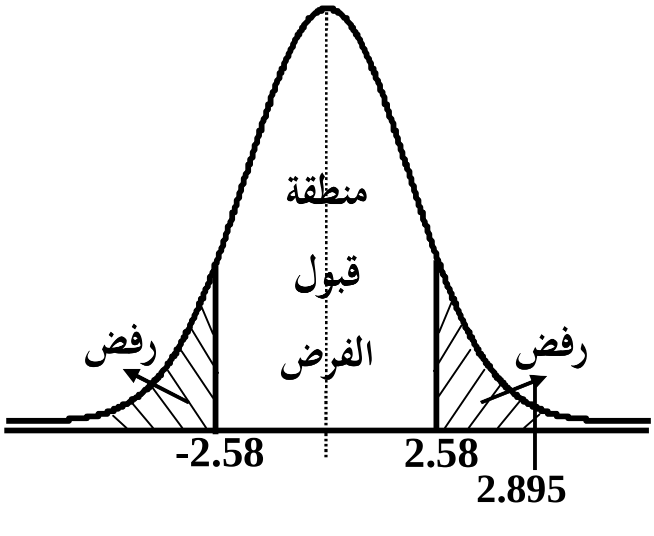
$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$$
$$\alpha = 0.05 \quad \Rightarrow \quad = Z_{0.05} = 1.645$$

$$S_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{(5)^2}{500} + \frac{(6)^2}{480}} = 0.35$$

- نحسب بعد ذلك قيمة إحصاء الاختبار (Z^*)من العلاقة التالية

$$Z^* = \frac{\left[\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right] - \left[\mu_1 - \mu_2\right]}{S_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} = \frac{(30-28)-(0)}{0.35}$$
$$= 5.71$$

4 – نقوم برسم الفرض وتحديد مناطق القبول و الرفض



5- اتخاذ القرار

 # من الرسم نلاحظ أن Z^* تقع في منطقة الرفض و بالتالي نرفض الفرض الأصلي و نقبل الفرض البديل

اختبارات الفروض للفرق بين متوسطى عينتين غير مستقلتين

في هذه الحالة يكون المثال علي شكل تجربة وهناك قراءات قبل إجراء تجربة معينة و قراءات أخرى بعد إجراء التجربة حيث تمثل القراءات (قبل) العينة الأولي و تمثل القراءات (بعد) العينة الثانية ونلاحظ أن $n_1 = n_2 = n$

و يعتمد الحل علي تكوين جدول نحسب فيه الفروق (d) و مربع هذه الفروق ثم نحسب ما يلي

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} \quad , \quad S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(d_i - \bar{d}\right)^2}{n-1}}$$

حيث أن $\bar{d}$ تمثل متوسط قيم المتغير d و [d] تمثل الفرق بين كل قراءة قبل و بعد إجراء التجربة و S_d تمثل الانحراف المعياري للفروق d

و تكون الفروض الاختبارات في هذه الحالة هي

أ - يكون الفرض الأصلي في هذه الحالة كالتالي

$$H_0 : \mu_d = 0$$

حيث أن μ_d يعبر عن متوسط الفرق

ب - يكون الفرض البديل علي إحدى الصور التالية

$$a) \quad H_1 : \mu_d \neq 0$$

اختبار جانبين (القيمة الجدولية عند $\frac{\alpha}{2}$)

$b) \quad H_1 : \mu_d > 0$

اختبار جانب ايمن (القيمة الجدولية عند α)

$c) \quad H_1 : \mu_d < 0$

اختبار جانب ايسر (القيمة الجدولية عند α)

جـ - نقوم بحساب قيمة حسابية من توزيع **t** كالتالي

$$\boxed{t = \frac{\bar{d} - (\mu_d)}{S_{\bar{d}}}}$$

وتحسب $t_{\text{الجدولية}}$ عند درجة حرية $(n-1)$

$$S_{\bar{d}} = \frac{S_d}{\sqrt{n}}$$

و تكون فترة الثقة كالتالي

$$\bar{d} \pm t_{\alpha/2} S_{\bar{d}}$$

مثـال

عند سحب عينة من 8 من الرجال من أحد النوادي الذين يرغبون في قياس وزنهم و تم تسجيل وزن كل منهم و سجل وزنهم مرة أخرى بعد إشراكهم في نظام غذائي معين لمدة شهر بهدف إنقاص وزنهم و كانت البيانات كما يلي

الوزن قبل البرنامج	80	85	90	92	86	83	96	98
الوزن بعد البرنامج	78	82	88	87	80	80	89	90

و المطلوب

أ) اختبار انه لا يوجد تأثير للنظام الغذائي المتبع عند مستوي معنوية 5%

ب) تقدير فترة ثقة متوسط الفرق بدرجة ثقة 95% .

الحـــل

نقوم أولاً بتصميم الجدول التالي

الوزن قبل البرنامج x	الوزن بعد البرنامج y	الفرق $d = x - y$	$d - \bar{d}$	$(d - \bar{d})^2$
80	**78**	**2**	**2-4.5=-2.5**	**$(-2.5)^2$=6.25**
85	**82**	**3**	**3-4.5=-1.5**	**$(-1.5)^2$=2.25**
90	**88**	**2**	**-2.5**	**6.25**
92	**87**	**5**	**0.5**	**0.25**
86	**80**	**6**	**1.5**	**2.25**
83	**80**	**3**	**-1.5**	**2.25**
96	**89**	**7**	**2.5**	**6.25**
98	**90**	**8**	**3.5**	**12.25**
		36		**38**

من الجدول نجد أن

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 36 \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} \left(d_i - \bar{d}\right)^2 = 38$$

$$\therefore \quad \bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} = \frac{36}{8} = 4.5$$

$$\therefore \quad S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(d_i - \bar{d}\right)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{38}{8-1}} = \sqrt{\frac{38}{7}} = 2.33$$

$$\therefore \quad S_{\bar{d}} = \frac{S_d}{\sqrt{n}} = \frac{2.33}{\sqrt{8}} = 0.824$$

أ) تكون الفروض في هذه الحالة هي

$$H_0 : \mu_d = 0$$
$$H_1 : \mu_d \neq 0$$

اختبار جانبين (القيمة الجدولية عند $\frac{\alpha}{2}$)

و من جدول **t** و عند $\frac{\alpha}{2}$ و درجة حرية $(n-1)$ نوجد القيمة الجدولية

$$T_{(0.025,7)} = 2.365$$

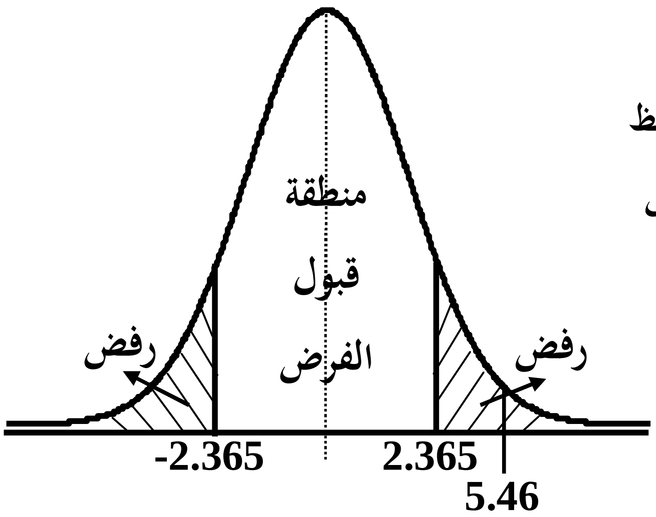
و تحسب القيمة المحسوبة كالتالي

$$t^* = \frac{\bar{d} - (\mu_d)}{S_{\bar{d}}} = \frac{4.5 - 0}{0.824} = 5.46$$

نقوم برسم الفرض وتحديد مناطق

القبول و الرفض ومن الرسم نلاحظ

أن **T** المحسوبة تقع في منطقة الرفض



∴ نرفض الفرض العدمي و نقبل الفرض البديل.

#يمكن الحكم أيضاً بمقارنة [القيمة المطلقة لـ t^*] $\Leftarrow |t^*|$ و قيمة **t** الجدولية كالتالي

$$|t^*| = 5.46 > t_{\alpha/2} = 2.365$$

∴ نرفض الفرض الأصلي و نقبل الفرض البديل

ب) بالتعويض في فترة الثقة نجد أن

$$\bar{d} \pm t_{\alpha/2} S_{\bar{d}}$$

$$= (4.5) \pm 2.365\left(0.824\right)$$
$$= 4.5 \pm 1.95$$
$$\left(2.55 \le \mu_1 - \mu_2 \le 6.45\right)$$

مثـــــال

قامت احدي الشركات بتعيين 15مبرمج حاسب الي وفي باية التعيين طلبت الادارة من كل مبرمج كتابة برنامج معين علي الحاسب الالي وبعد ذلك تم اعطاء دورة تدريبية علي اساليب البرمجة لمدة 3شهور لهؤلاء المبرمجين وفي نهاية التدريب طلب منهم مرة اخري كتابة برنامج اخر بنفس مستوي الصعوبة والبيانات لتالية تمثل الوقت الذي استغرقه كل مبرمج في كتابة البرنامج بالدقائق قبل وبعد الدورة التدريبية

رقم المبرمج	قبل التدريب	بعد التدريب	رقم المبرمج	قبل التدريب	بعد التدريب
1	90	90	9	130	95
2	100	90	10	110	100
3	120	95	11	96	90
4	110	90	12	92	90
5	115	95	13	135	105
6	95	85	14	140	130
7	105	80	15	108	95
8	125	100			

أ) هل تدعم هذه البيانات كفاءة التدريب في سرعة الانتهاء من البرنامج؟

ب)كون فترة ثقة 93% لمتسط الفرق في زمن كتابة البرنامج قبل وبعد التدريب

الحــــــل

قبل التدريب x	بعدالتدريب y	الفرق $d = x - y$	$d - \bar{d}$	$(d - \bar{d})^2$
90	**90**	**0**	**-15.7**	**246.94**
100	**90**	**10**	**-5.7**	**32.49**
120	**95**	**25**	**9.3**	**86.49**
110	**90**	**15**	**0.7**	**.49**
115	**95**	**20**	**4.3**	**18.49**
95	**85**	**10**	**-5.7**	**32.49**
105	**80**	**25**	**9.3**	**86.49**
125	**100**	**25**	**9.3**	**86.49**
130	**95**	**35**	**19.3**	**372.49**
110	**100**	**10**	**-5.7**	**32.49**
96	**90**	**6**	**9.7**	**94.09**
92	**90**	**2**	**-13.7**	**187.69**
135	**105**	**30**	**14.3**	**204.49**
140	**130**	**10**	**-5.7**	**32.49**
108	**95**	**13**	**-2.7**	**7.29**
				1520.95

من الجدول نجد أن

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 236 \quad , \quad \sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \bar{d}\right)^2 = 1520.95$$

$$\therefore \qquad \bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} = \frac{236}{15} = 15.7$$

$$\therefore \qquad S_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \bar{d}\right)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{1520.95}{15-1}} = \sqrt{\frac{38}{14}} = 10.4$$

$$\therefore \quad S_{\bar{d}} = \frac{S_d}{\sqrt{n}} = \frac{10.4}{\sqrt{15}} = 2.68$$

أ) تكون الفروض في هذه الحالة هي

$$H_0 : \mu_d = 0$$
$$H_1 : \mu_d \neq 0$$

اختبار جانبين (القيمة الجدولية عند $\frac{\alpha}{2}$)

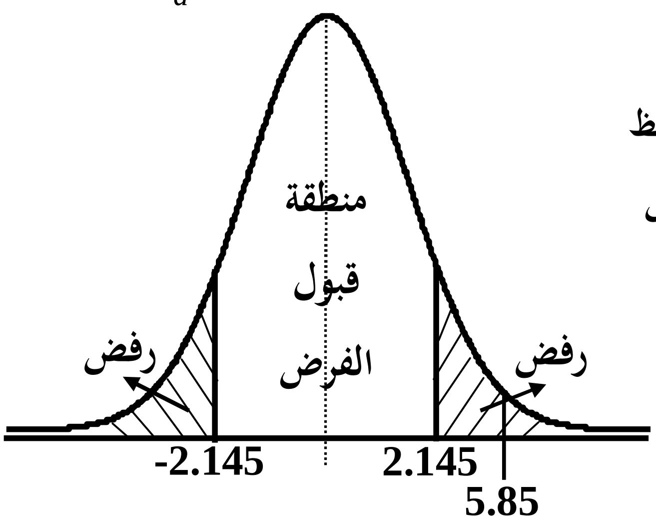
و من جدول t و عند $\frac{\alpha}{2}$و درجة حرية $(n-1)$نوجد القيمة الجدولية

$T_{(0.025,14)} = 2.145$

و تحسب القيمة المحسوبة كالتالي

$$t^* = \frac{\bar{d} - (\mu_d)}{S_{\bar{d}}} = \frac{15.7 - 0}{2.68} = 5.85$$

نقوم برسم الفرض وتحديد مناطق القبول و الرفض ومن الرسم نلاحظ أن Tالمحسوبة تقع في منطقة الرفض



$\therefore$ نرفض الفرض العدمي و نقبل الفرض البديل.

ب) بالتعويض في فترة الثقة نجد أن

$$\bar{d} \pm t_{\alpha/2} S_{\bar{d}}$$

$$= (15.7) \pm 2.145(2.68)$$
$$= 15.7 \pm 5.75$$
$$(9.95 \le \mu_1 - \mu_2 \le 21.45)$$

اختبارات الفروض للفرق بين نسبتي مجتمعين (عينات كبيرة ومستقلة)

أ - يكون الفرض الأصلي في هذه الحالة كالتالي

$$H_0 : p_1 - p_2 = 0$$

ب - يكون الفرض البديل علي إحدى الصور التالية

$$H_1 : p_1 - p_2 \neq 0$$

اختبار جانبين (القيمة الجدولية عند $\frac{\alpha}{2}$)

أو

$$H_1 : p_1 - p_2 > 0$$

اختبار جانب ايمن (القيمة الجدولية عند α)

أو

$$H_1 : p_1 - p_2 < 0$$

اختبار جانب ايسر (القيمة الجدولية عند α)

و في هذا الاختبار تكون قيمة التوزيع من جدول z دائما

ج - نقوم بحساب قيمة حسابية من توزيع z كالتالي

$$\boxed{Z^* = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (P_1 - P_2)}{S_{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}}}$$

و تكون فترة الثقة كالتالي

$$(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) \pm Z_{\alpha/2} S_{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}$$

مع ملاحظة أن

$$S_{\hat{P}_1 - \hat{P}_2} = \sqrt{\overline{P}\ \overline{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} \Longrightarrow$$

هذا عند التطبيق في اختبارات الفروض

$$S_{\hat{P}_1 - \hat{P}_2} = \sqrt{\frac{\hat{p}_1 \hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2 \hat{q}_2}{n_2}} \Longrightarrow$$

هذا عند التطبيق في تقدير فترة الثقة

حيث أن

$$\overline{P} = \frac{n_1 \hat{p}_1 + n_2 \hat{p}_2}{n_1 + n_2} \quad , \quad \overline{q} = 1 - \overline{p}$$

مثـــــال

قامت مصلحة الضرائب بعمل دراسة على عينة من 500 موظف من الذكور و عينة اخري من 400 موظف من الإناث . وكان الهدف من الدراسة معرفة ما إذا كان من الممكن فرض ضرائب على السجائر .

وبينت الدراسة ان عدد285 من الذكور و عدد 216 من الإناث يوافقون على فرض ضرائب على السجائر .

أ) كون فترة ثقة 97% للفرق بين نسبة الموافقين على فرض الضرائب من الذكور و الإناث .

ب) هل تدعم هذه الدراسة الفرض القائل بأن نسبة الموافقين من الرجال على فرض الضرائب على السجائر أكبر من نسبة الموافقين من الإناث بمستوى معنوية 1%

الحــل

الإناث	الرجال
$n_2 = 400$	$n_1 = 500$

$$x_1 = 285 \qquad\qquad x_2 = 216$$

$$\hat{p}_1 = \frac{285}{500} = 0.57 \qquad\qquad \hat{p}_2 = \frac{216}{400} = 0.54$$

$$\hat{q}_1 = 1 - 0.57 = 0.43 \qquad\qquad \hat{q}_2 = 1 - 0.54 = 0.46$$

$$1 - \alpha = 0.97 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0.03$$

أ) تكون فترة الثقة هي

$$(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) \pm Z_{\alpha/2} S_{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}$$

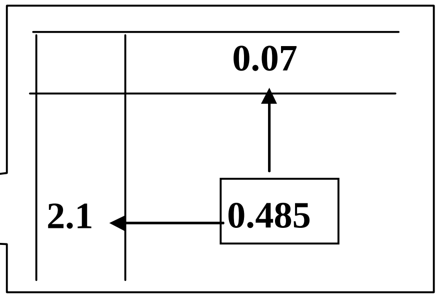
و نقوم بإيجاد القيمة الجدوليه من جدول z و ذلك لان قيمة α ليست من القيم المحفوظة مع ملاحظة انه عن البحث في جدول z لابد أولا من طرح ما نبحث عنة من 0.5 ثم نبحث عكسيا عن ناتج الطرح فنحصل على القيمة الجدولية

$$0.5 - \frac{\alpha}{2} = 0.5 - 0.015 = 0.485$$

ومن جدول (Z) و عند البحث عكسياً نجد أن

$$Z_{\alpha/2} = 2.17$$

و الشكل المقابل يبين طريقة البحث في الجدول



ونقوم بحساب $S_{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}$ كالتالي

$$S_{\hat{P}_1 - \hat{P}_2} = \sqrt{\frac{\hat{p}_1 \hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2 \hat{q}_2}{n_2}} = \sqrt{\frac{0.57 \times 0.43}{500} + \frac{0.54 \times 0.46}{400}}$$

$$= 0.033$$

وبالتعويض في فترة الثقة نجد أن

$$(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) \pm Z_{\alpha/2} S_{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}$$

$$= (0.57 - 0.54) \pm 2.17(0.033)$$
$$= 0.03 \pm 0.072$$
$$(-0.042 \le P_1 - P_2 \le 0.102)$$

ب) اختبار الفرق بين النسبتين

يكون الفرض الأصلي كالتالي

$$H_0 : P_1 - P_2 = 0$$

لاحظ انه ذكر كلمة اكبر من بالتالي يكون الفرض البديل هو

$$H_1 : P_1 - P_2 > 0 \qquad \Longrightarrow$$ **الاختبار ذو طرفين**

نقوم بحساب النسبة المشتركة $\overline{P}$ كالتالي

$$\overline{P} = \frac{n_1 \hat{p}_1 + n_2 \hat{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{500 \times 0.57 + 400 \times 0.54}{500 + 400} = 0.557$$

$$\therefore \qquad \overline{q} = 1 - \overline{P} = 1 - 0.557 = 0.443$$

ونقوم بحساب $S_{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}$ كالتالي

$$S_{\hat{P}_1 - \hat{P}_2} = \sqrt{\overline{P}\ \overline{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} = \sqrt{0.557 \times 0.443\left(\frac{1}{500} + \frac{1}{400}\right)}$$
$$= 0.0333$$

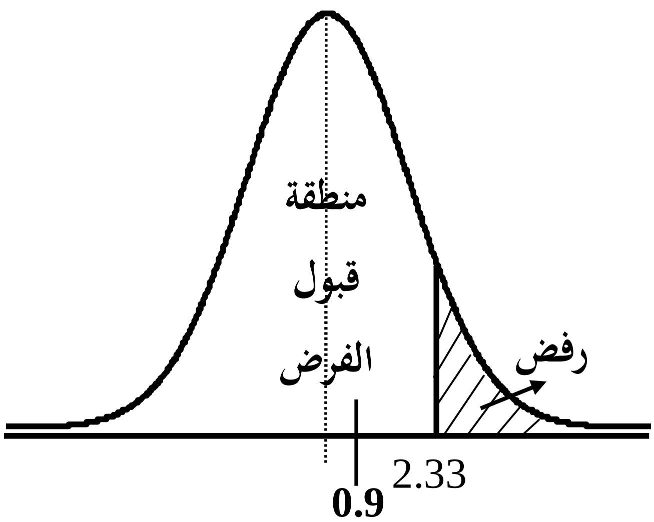
القيمة الجدولية توجد عند α [لان الاختبار ذو جانب] و من الجدول الطبيعي Z كالتالي

$$\alpha = 0.01 \qquad \Rightarrow \qquad Z_\alpha = Z_{0.01} = 2.33$$

3 - نحسب بعد ذلك قيمة إحصاء الاختبار (Z^*)من العلاقة التالية

$$Z^* = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (P_1 - P_2)}{S_{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}} = \frac{(0.57 - 0.54) - (0)}{0.0333} = 0.9$$

4 – نقوم برسم الفرض وتحديد مناطق القبول و الرفض



5- اتخاذ القرار

 # من الرسم نلاحظ أن Z^* تقع في منطقة الرفض و بالتالي نرفض الفرض الأصلي و نقبل الفرض البديل

مثـــــال

في عينة من 200 حساب جاري في البنك التجاري فرع القاهرة وجد ان نسبة الارصدة التي تزيد عن 500 الف جنيه تبلغ 0.29 بينما في عينة اخري من 250 حساب جاري في البنك التجاري فرع طنطا وجد ان نسبة الارصدة التي تزيد عن 500 الف جنيه تبلغ 0.36 هل يدل ذلك علي ان فرع طنطا يتعامل مع عملاء ارصدة حساباتهم اكبر من عملاء فرع القاهرة (استخدم مستوي معنوية 1%)

الحــل

فرع القاهرة

$n_1 = 200$

فرع طنطا

$n_2 = 250$

$\hat{p}_1 = 0.29$

$\hat{q}_1 = 1 - 0.29 = 0.71$

$\hat{p}_2 = 0.36$

$\hat{q}_2 = 1 - 0.36 = 0.64$

$1 - \alpha = 0.95 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0.05$

اختبار الفرق بين النسبتين

يكون الفرض الأصلي كالتالي

$$H_0 : P_1 - P_2 = 0$$

لاحظ انه ذكر كلمة اكبر من بالتالي يكون الفرض البديل هو

$$H_1 : P_1 - P_2 > 0 \quad \Longrightarrow$$ الاختبار ذو طرفين

نقوم بحساب النسبة المشتركة $\overline{P}$ كالتالي

$$\overline{P} = \frac{n_1 \hat{p}_1 + n_2 \hat{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{200 \times 0.29 + 250 \times 0.36}{200 + 250} = 0.32$$

$$\therefore \quad \overline{q} = 1 - \overline{P} = 1 - 0.32 = 0.68$$

ونقوم بحساب $S_{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}$ كالتالي

$$S_{\hat{P}_1 - \hat{P}_2} = \sqrt{\overline{P}\ \overline{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} = \sqrt{0.32 \times 0.68\left(\frac{1}{200} + \frac{1}{250}\right)}$$

$$= 0.04$$

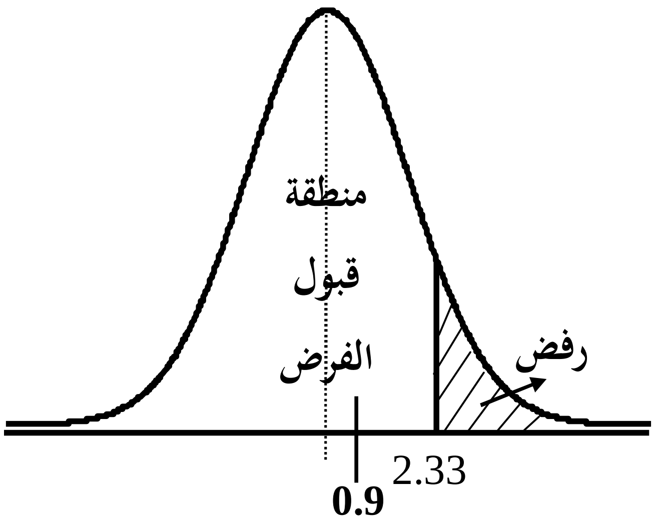
القيمة الجدولية توجد عند α **[لان الاختبار ذو جانب] و من الجدول الطبيعي Z كالتالي**

$$\alpha = 0.01 \quad \Rightarrow \quad Z_{\alpha} = Z_{0.01} = 2.33$$

3 - نحسب بعد ذلك قيمة إحصاء الاختبار (Z^*)من العلاقة التالية

$$Z^* = \frac{(\hat{P}_1 - \hat{P}_2) - (P_1 - P_2)}{S_{\hat{P}_1 - \hat{P}_2}} = \frac{(0.29 - 0.36) - (0)}{0.04} = -1.75$$

4 – نقوم برسم الفرض وتحديد مناطق القبول و الرفض



5- اتخاذ القرار

 # من الرسم نلاحظ أن Z^* **تقع في منطقة الرفض و بالتالي نرفض الفرض الأصلي و نقبل الفرض البديل**

تمارين الفصل الرابع

1) اختيرت عينة من 40 موظف في احد المصالح الحكومية فوجد ان متوسط عدد ساعات العمل الفعلية في يوم العمل يبلغ 3.5 ساعة بانحراف معياري 1.2 ساعة بينما في عينة اخري من 50 موظف باحد الشركات القطاع الخاص وجد ان متوسط عدد ساعات العمل الفعلية 6 ساعات بانحراف معياري 2.4 ساعة (استخدم مستوي معنوية 5 %)

أ) كون فترة ثقة للفرق بين متوسط ساعات العمل اليومية لموظفي المصلحة الحكومية وشركة القطاع الخاص

ب)هل تؤيد هذه البيانات القول بان متوسط ساعات عمل الموظفين بالقطاع الخاص اكبر من المصالح الحكومية؟

2) البيانات التالية تمثل سعر السهم بالقروش لعدد 8 شركات قبل وبعد تطبيق قانون الحفظ المركزي للاسهم والسندات

رقم الشركة	1	2	3	4	5	6	7	8
سعر السهم قبل القانون	800	720	1000	920	430	560	760	410
سعر السهم بعد القانون	810	1000	900	960	460	510	710	520

هل ادي تطبيق قانون الحفظ المركزي للاسهم والسندات الي حدوث تغيير يعتد به احصائيا في اسعارها مع افتراض ان اسعارالاسهم تتوزع طبيعيا(استخدم مستوي معنوية 1%)

3) أخذت عينة عشوائية حجمها $n_1 = 10$ من العاملين بأحد البنوك الحكومية فكان متوسط الأجر الشهري في إحدي السنوات في العينة يساوي $\overline{X}_1 = 800$ جنية و أخذت عينة عشوائية اخري حجمها $n_2 = 10$ من العاملين بأحد البنوك الاستثمارية فكان متوسط الأجر الشهري في نفس السنة في العينة يساوي $\overline{X}_2 = 870$ جنية . فإذا كان الانحراف المعياري للأجر في البنك الحكومي يساوي $\sigma_1 = 25$ جنية و الانحراف المعياري للأجر في البنك الاستثماري يساوي $\sigma_2 = 40$ جنية .

المطلوب عند درجة ثقة 95% أختبر الفرض القائل أن متوسط الأجر الشهري في البنك الاستثماري يزيد عن متوسط الأجر في البنك الحكومي بـ 50جنية علي الأكثر.

4) في أحد بحوث التسويق لشركة لإنتاج منتج معين لها فرعين لبيع هذا المنتج سحبت عينة عشوائية للمبيعات الشهرية لعشرة شهور من كل فرع فوجد أن

$$\overline{X}_1 = 85 \quad , \quad S_1 = 2 \quad , \quad \overline{X}_2 = 88 \quad , \quad S_2 = 1.5$$

و المطلوب

1 – اختبر الفرض القائل أن متوسط مبيعات الفرع الأول اكبر من متوسط مبيعات الفرع الثاني بدرجة ثقة 95%

5) سحبت عينتين حجمهما $n_1 = 15, n_2 = 20$ من مجتمعين يتبع المتغير محل الدراسة في كل منهما التوزيع الطبيعي بتباين $\sigma_1^2 = 9, \sigma_2^2 = 15$ علي الترتيب فإذا كان متوسط العينة الأولى $\overline{X}_1 = 18$ و متوسط العينة الثانية $\overline{X}_2 = 20$.

اختبر الفرض القائل أن قيمة الوسط الحسابي في كل من المجتمعين المسحوب منهما العينتين مختلفين و ذلك بدرجة ثقة 90%

6) عند سحب عينة من 8 من الرجال من أحد النوادي الذين يرغبون في قياس وزنهم و تم تسجيل وزن كل منهم و سجل وزنهم مرة أخرى بعد إشراكهم في نظام غذائي معين لمدة شهر بهدف إنقاص وزنهم و كانت البيانات كما يلي

الوزن قبل البرنامج	80	85	90	92	86	83	96	98
الوزن بعد البرنامج	78	82	88	87	80	80	89	90

و المطلوب

أ) اختبار انه لا يوجد تأثير للنظام الغذائي المتبع عند مستوي معنوية 5 ٪

ب) تكوين فترة ثقة لمتوسط الفرق في الوزن عند مستوي معنوية 5 ٪

7) لدراسة ظاهرة الأمية أخذت عينة عشوائية مكونة من 600 شاب من احدي المحافظات فوجد أن عدد الأميين منهم 180 طالب و أخذت عينة عشوائية ثانية مكونة من 400 طالب من محافظة أخري فوجد أن عدد الأميين منهم 100 و المطلوب

أ) اختبر الفرض القائل بأنة لا يوجد فرق بين نسبتي الأمية بالمحافظتين عند مستوي معنوية 1%

ب) أوجد بدرجة ثقة 99 ٪ تقديراً للفرق بين نسبة الأمية بالمحافظتين

الفصل الخامس

تطبيقات التقدير و اختبارات الفروض علي Minitab

مقدمة:

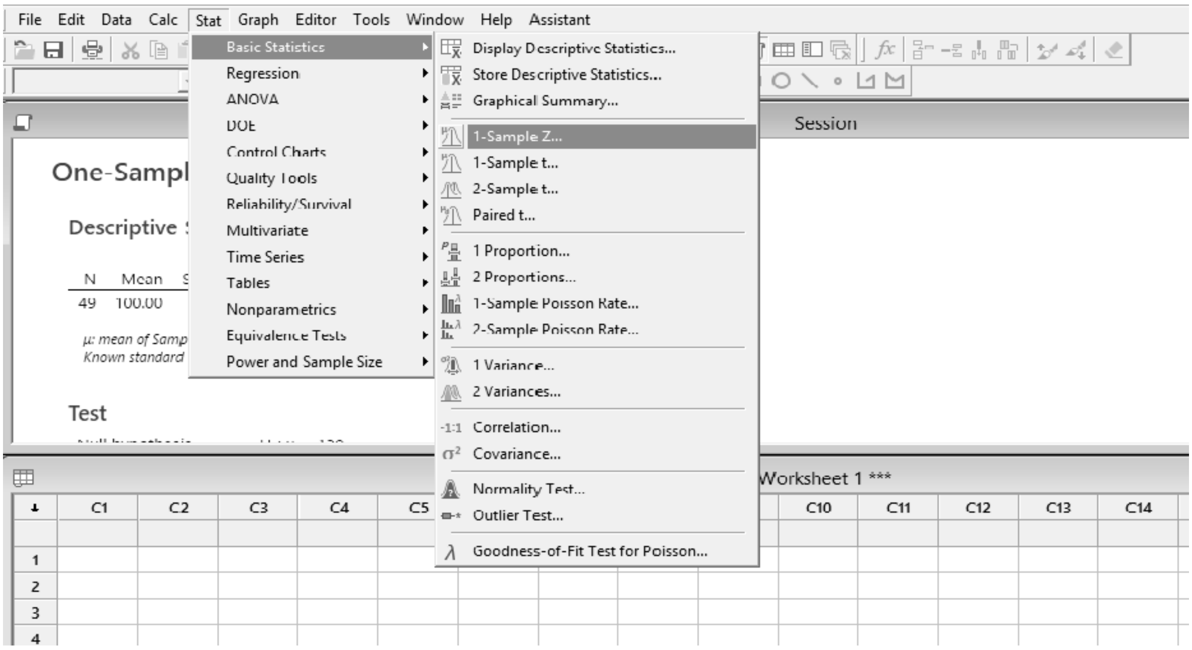
في هذا الفصل سوف نستعرض مجموعة من الامثلة لتطبيق االتقدير و اختبارات الفروض سواء لعينة واحدة او لعينتين وذلك بأستخدام برنامج Minitab

مثـــــال(1)

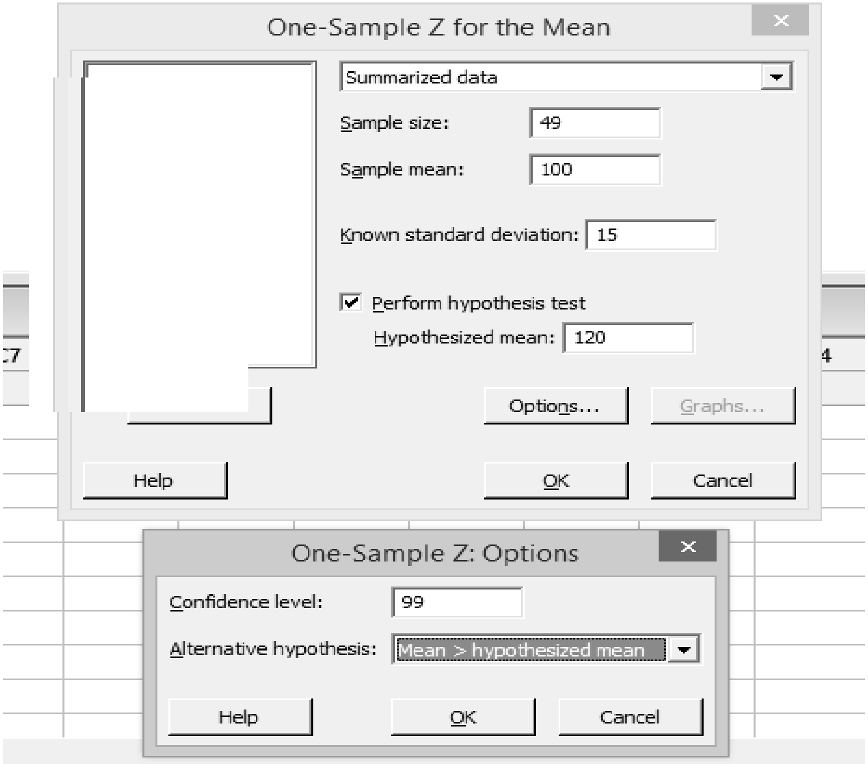
إذا كان متوسط الأجر الأسبوعي للعاملين بأحد المصانع للملابس الجاهزة يتوزع طبيعياً بانحراف معياري 15 جنية و سحبت عينة من 49 عاملا و حسب الوسط الحسابي لها فكان 100 جنية في الأسبوع .

اختبر الفرض القائل أن متوسط الأجر الأسبوعي للعامل يساوي 120 وذلك عند درجة ثقة 99% مع بناء فترة الثقة و ذلك بأستخدام برنامج Minitab

نتحرك داخل البرنامج كما هو موضح بالشكل التالي



نقوم بملء البيانات كما هو موضح بالشكل التالي



فتكون نتائج البرنامج كالتالي

One-Sample Z

Descriptive Statistics

N	Mean	SE Mean	99% CI for μ
49	100.00	2.14	(94.48; 105.52)

μ: mean of Sample
Known standard deviation = 15

Test

Null hypothesis	H_0: μ = 120
Alternative hypothesis	H_1: μ ≠ 120

Z-Value	P-Value
-9.33	0.000

لاحظ أن فترة الثقة هي

$$94.48 \le \mu \le 105.52$$

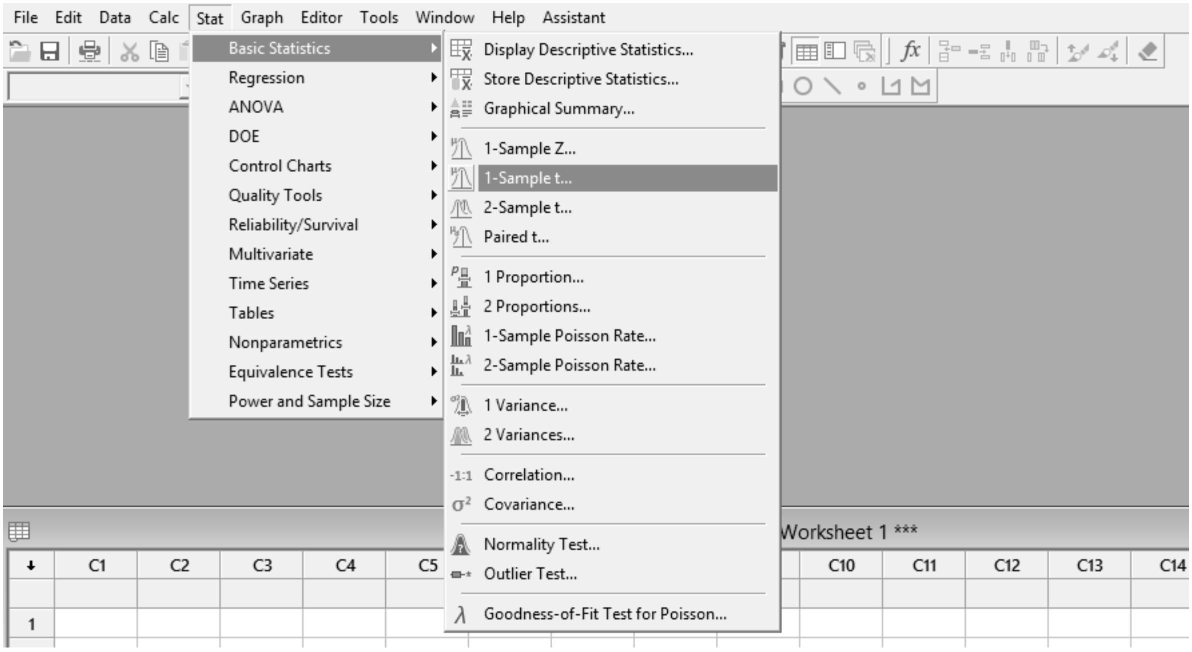
نرفض الفرض العدمي القائل أن المتوسط يساوي 120 و نقبل الفرض البديل القائل أن المتوسط لا يساوي 120 لان قيمة P-Value تساوي 0.000 هي اقل من 1%

مثـــــال (2)

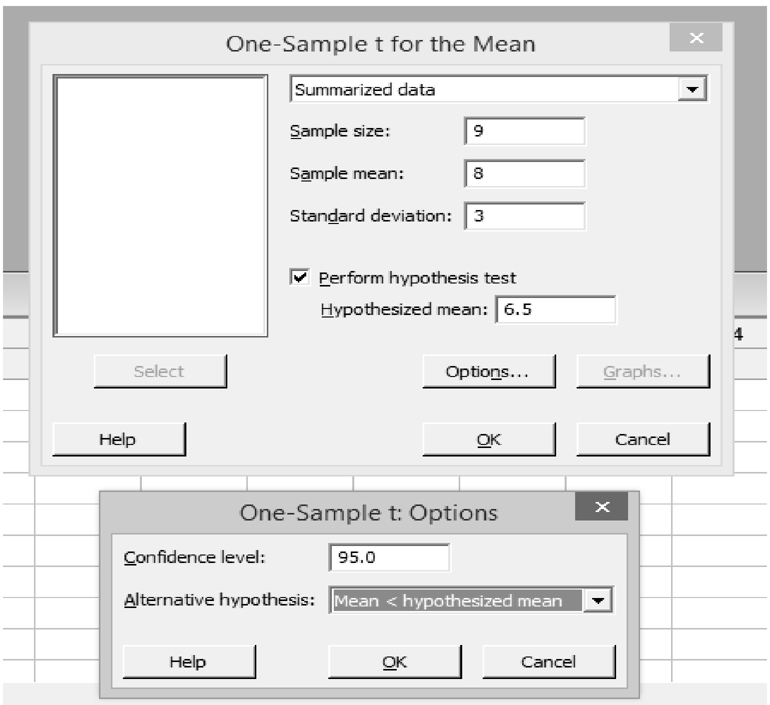
سحبت عينـة مكونـة من 9 طـلاب وحسب الوسط الحسـابي و الانحـراف المعيـاري لدرجـة الطالب في مادة الإحصاء في العينة فوجد $\overline{X} = 8$ و $S = 3$

اختبر الفرض القائل أن متوسط درجة الطالب في الإحصاء في المجتمع المسحوب منة العينة اقل من 6.5 بدرجة ثقة 95% .

نتحرك داخل البرنامج كما هو موضح بالشكل التالي



نقوم بملء البيانات كما هو موضح بالشكل التالي



فتكون نتائج البرنامج كالتالي

One-Sample T

Descriptive Statistics

N	Mean	StDev	SE Mean	95% Upper Bound for μ
9	8.00	3.00	1.00	9.86

μ: mean of Sample

Test

Null hypothesis H_0: $\mu = 6.5$

Alternative hypothesis H_1: $\mu < 6.5$

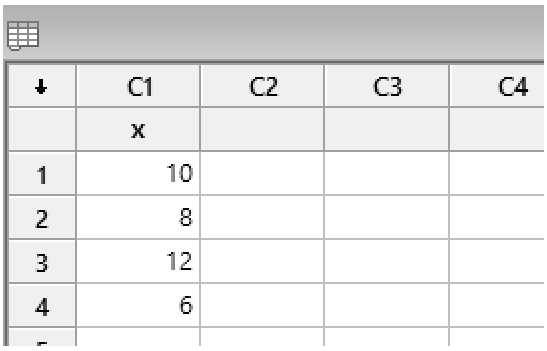
T-Value	P-Value
1.50	0.914

نقبل الفرض العدمي القائل أن المتوسط يساوي 6.5 و نرفض الفرض البديل القائل أن المتوسط اقل من 6.5 لان قيمة P-Value تساوي 0.914 هي أكبر من 5%

مثـــــال (3)

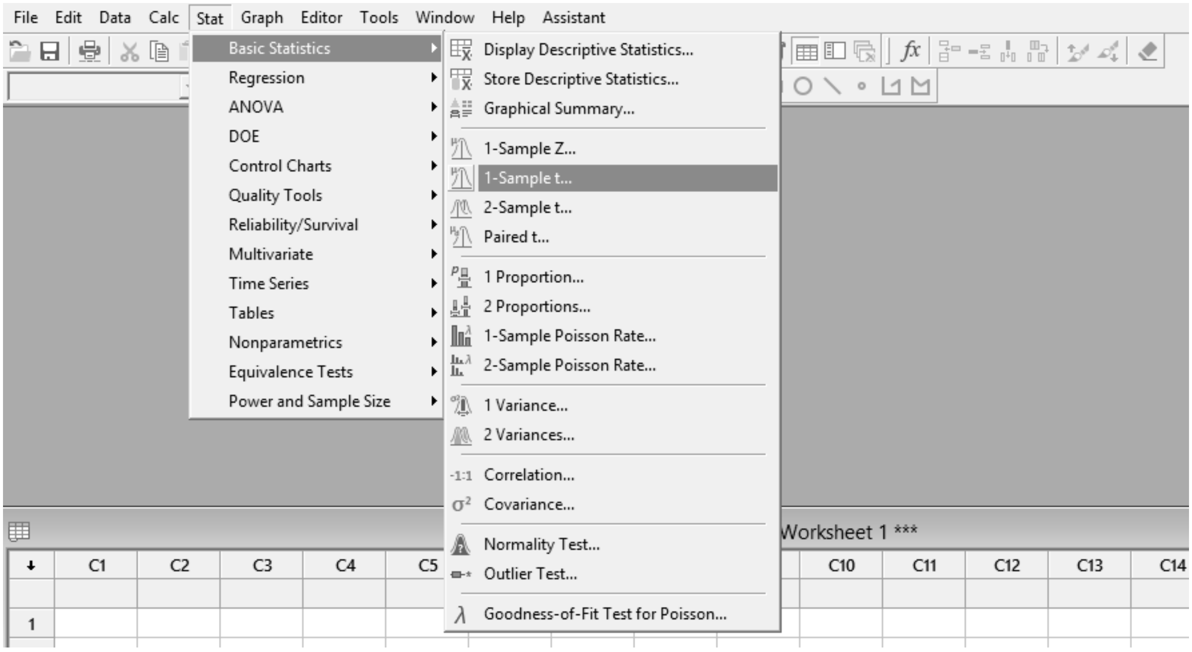
سحبت عينة عشوائية مكونة من 4 مفردات من مجتمع معتاد و سجلت قيم المشاهدات فكانت علي النحو التالي 10 , 8 , 12 , 6 أوجد فترة ثقة للوسط الحسابي للمجتمع بدرجة ثقة 95% ثم أختر الفرض القائل بأن المتوسط أكبر من 10.

نقوم أولاَ بادخال بيانات العينة كالتالي

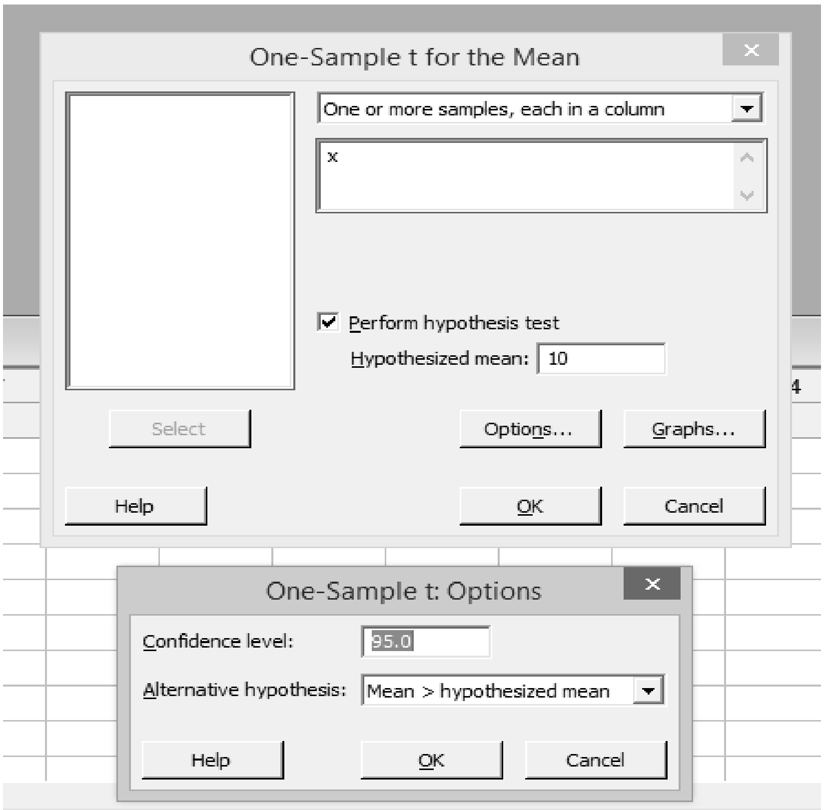


↓	C1	C2	C3	C4
	x			
1	10			
2	8			
3	12			
4	6			

نتحرك داخل البرنامج كما هو موضح بالشكل التالي



ثم نختار on or more samples, each in a column و نختار اسفلها المتغير x



فتكون نتائج البرنامج كالتالي

One-Sample T: x

Descriptive Statistics

N	Mean	StDev	SE Mean	95% Lower Bound for μ
4	9.00	2.58	1.29	5.96

μ: mean of x

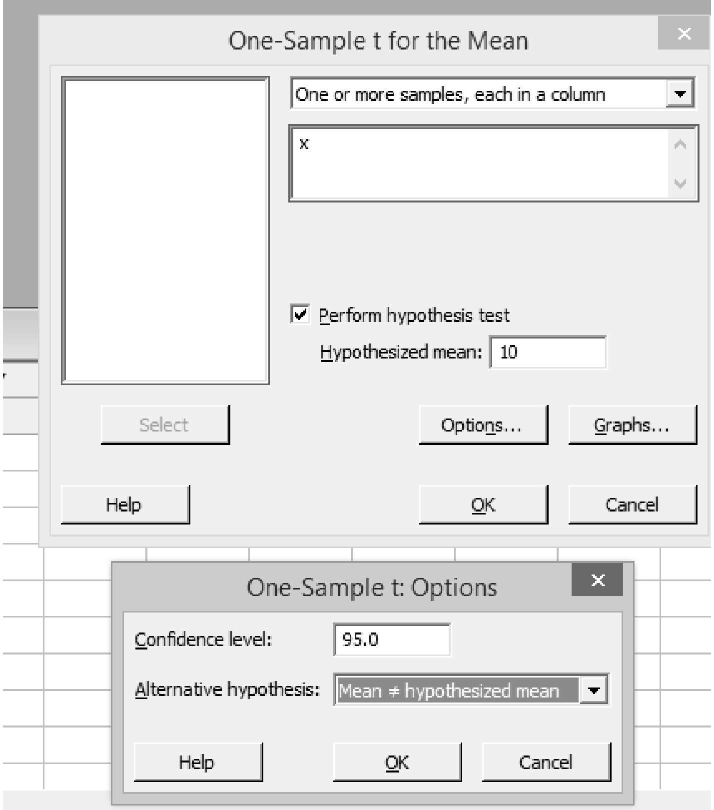
Test

Null hypothesis	H_0: μ = 10
Alternative hypothesis	H_1: μ > 10

T-Value	P-Value
-0.77	0.752

نقبل الفرض العدمي القائل أن المتوسط يساوي 10 و نرفض الفرض البديل القائل أن المتوسط اكبر من 10 لان قيمة P-Value تساوي 0.752 هي أكبر من 5%

ولحساب فترة الثقة نعود للشاشة السابقة و نعدل في خانة Alternative hypothesis ونجعلها لاتساوي كالتالي



فتكون النتائج كالتالي

One-Sample T: x

Descriptive Statistics

N	Mean	StDev	SE Mean	95% CI for μ
4	9.00	2.58	1.29	(4.89; 13.11)

μ: mean of x

Test

Null hypothesis H_0: μ = 10

Alternative hypothesis H_1: μ ≠ 10

T-Value	P-Value
-0.77	0.495

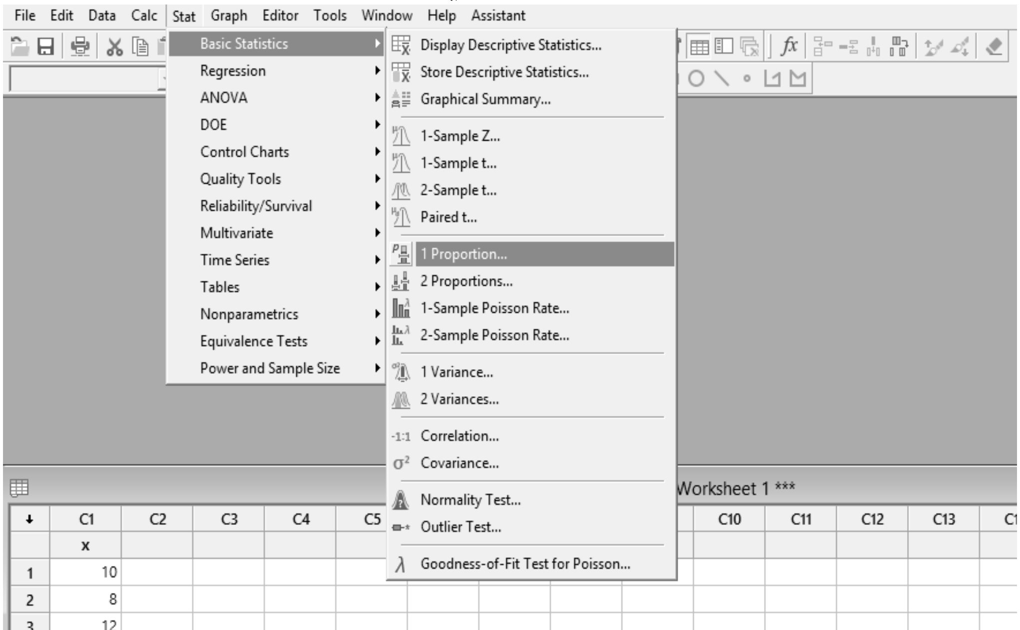
فتكون فترة الثقة هي

$$4.89 \leq \mu \leq 13.11$$

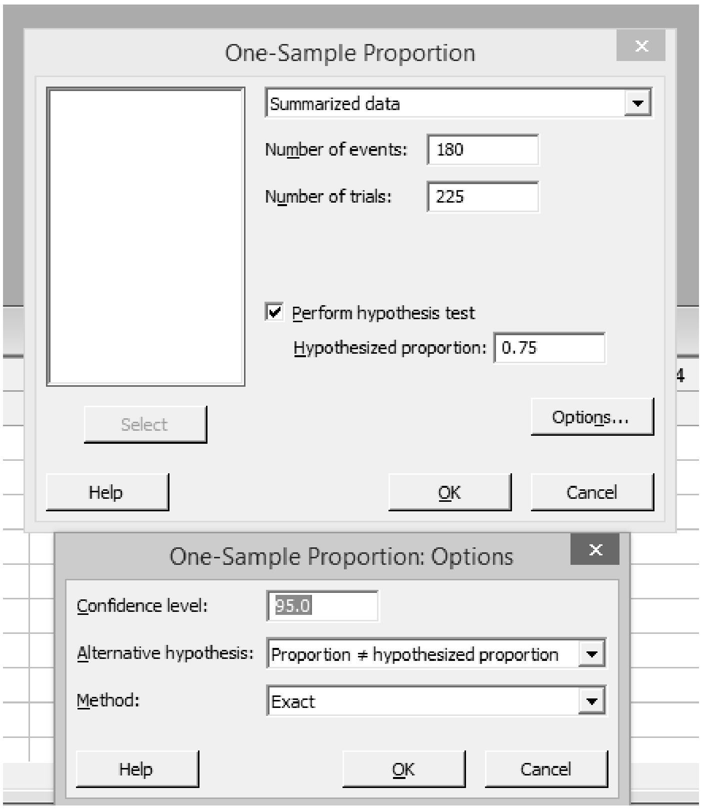
مثـــــال (4)

يزعم أحد المسئولين بوزارة الاتصالات أن ما تزيد نسبته عن 75% من الشباب فى سن المراهقة يستخدمون الانترنت لمدة تزيد عن 10 ساعات فى الأسبوع . وللتحقق من هذا الادعاء تم اختيار عينة من 225 من الشباب فى المراهقة فوجد أن من بينهم 180 شاب يستخدم الإنترنت أكثر من 10 ساعات فى الأسبوع . هل تؤيد بيانات هذه العينه بهذا الادعاء بمستوى معنوية 10% ثم أوجد فترة الثقة للنسبة.

نتحرك داخل البرنامج كما هو موضح بالشكل التالي



نقوم بملء البيانات كما هو موضح بالشكل التالي



فتكون نتائج البرنامج كالتالي

Test and CI for One Proportion

Method

p: event proportion

Exact method is used for this analysis.

Descriptive Statistics

N	Event	Sample p	95% CI for p
225	180	0.800000	(0.741692; 0.850218)

Test

Null hypothesis	H_0: p = 0.75
Alternative hypothesis	H_1: p ≠ 0.75

P-Value
0.078

لاحظ أن فترة الثقة هي

$$0.7417 \leq P \leq 0.8502$$

نقبل الفرض العدمي القائل أن النسبة تساوي 0.75 و نرفض الفرض البديل القائل أن النسبة لا تساوي 0.75 لان قيمة P-Value تساوي 0.078 هي أكبر من 5%

مثـــــال (5)

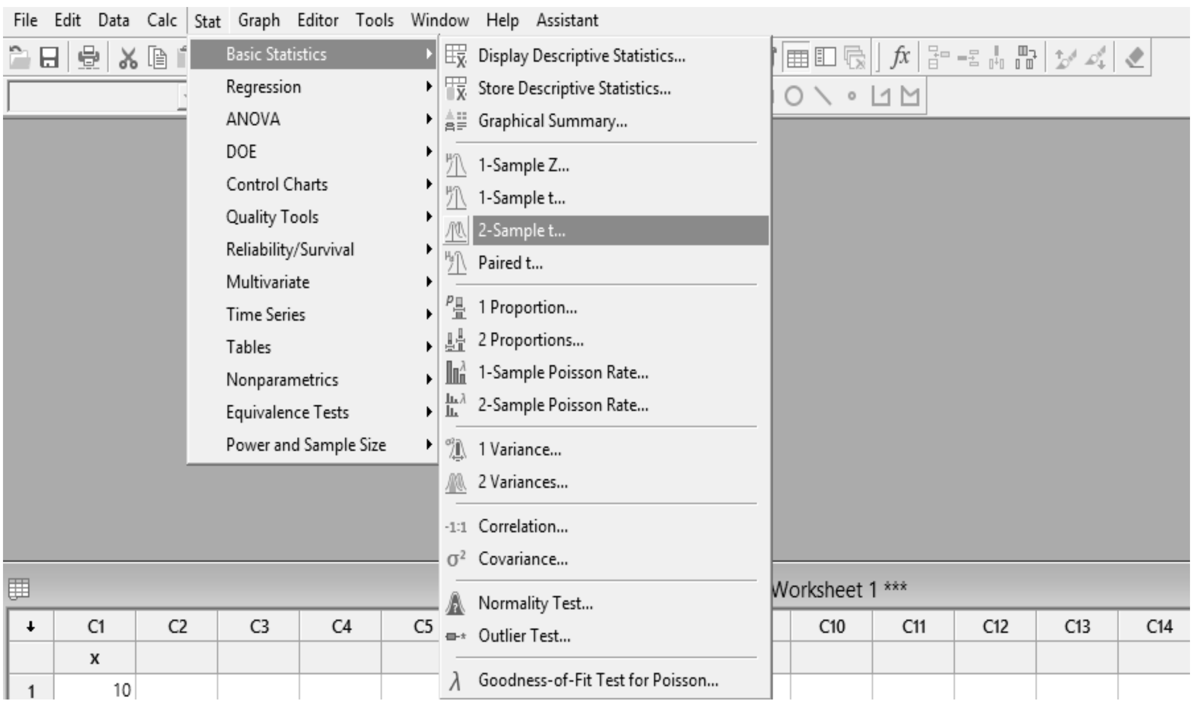
ترغب إدارة التسويق في عمل دراسة لمعرفة ما إذا كانت مشتريات العملاء من الذكور اقل من مشتريات العملاء من الإناث و ذلك بأحد محلات السوبر ماركت . و للتحقق من ذلك تم اختيار عينة من 25 من العملاء الذكور فوجد أن متوسط مشترياتهم في المرة الواحدة يبلغ 73جنية بانحر اف معياري 17.5 جنية . و كذلك تم اختيار عينة من 20 من العملاء الإناث فوجد أن متوسط مشترياتهم في المرة الواحدة يبلغ 87 جنية بانحراف معياري 14.4 جنية. و بافتراض أن مشتريات كل من الذكور و الإناث تتبع التوزيع الطبيعي بانحراف معياري غير معلوم و لكن يمكن افتراض انه متساوي .

المطلوب:

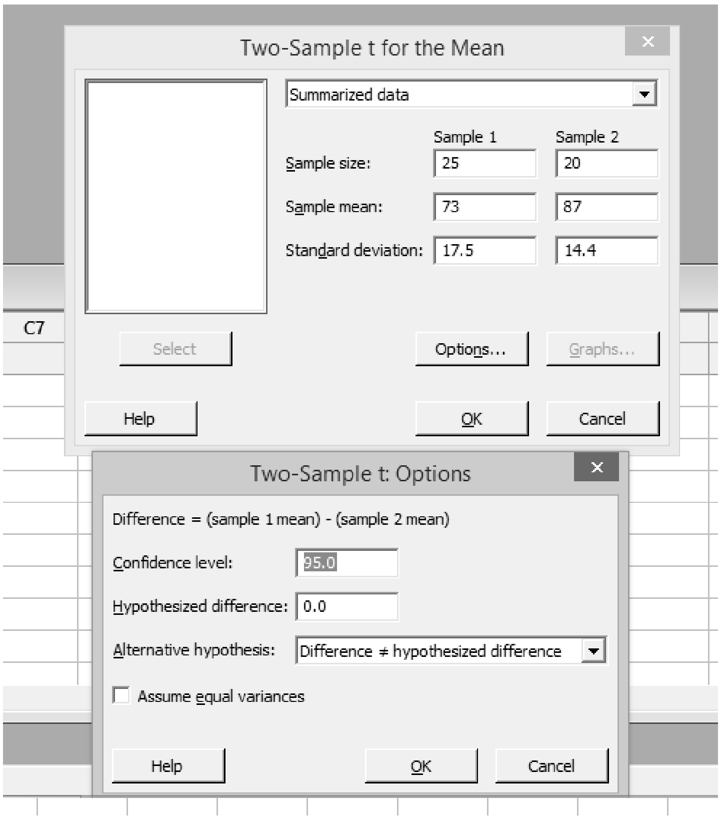
أ) تقدير فترة ثقة للفرق بين متوسط مشتريات الذكور و الإناث من هذا السوبر ماركت باستخدام مستوى ثقة 95%.

ب) اختبر الفرض الأخصائي أن متوسط مشتريات الذكور اقل من مشتريات الإناث باستخدام مستوى معنوية 5%.

نتحرك داخل البرنامج كما هو موضح بالشكل التالي



نقوم بملء البيانات كما هو
موضح بالشكل التالي



فتكون نتائج البرنامج كالتالي

Two-Sample T-Test and CI

Method

μ_1: mean of Sample 1

μ_2: mean of Sample 2

Difference: $\mu_1 - \mu_2$

Equal variances are not assumed for this analysis.

Descriptive Statistics

Sample	N	Mean	StDev	SE Mean
Sample 1	25	73.0	17.5	3.5
Sample 2	20	87.0	14.4	3.2

Estimation for Difference

Difference	95% CI for Difference
-14.00	(-23.60; -4.40)

Test

Null hypothesis H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$

Alternative hypothesis H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$

T-Value	DF	P-Value
-2.94	42	0.005

لاحظ أن فترة الثقة للفرق بين المتوسطين هي

$$-23.6 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq -4.4$$

نرفض الفرض العدمي القائل أنه لا يوجد فرق بين المتوسطين و نقبل الفرض البديل القائل أنه يوجد فرق بين المتوسطين لان قيمة P-Value تساوي 0.005 هي أقل من 5%

مثـــــال(6)

في دراسة لمتوسط إنفاق الأسرة علي التعليم في الريف وفي الحضر تم اختيار عينة من 5 اسر من إحدى القرى وعينة أخري من إحدى المدن وسجلت البيانات التالية والتي تمثل قيمة المبالغ التي أنفقتها كل أسرة في العام الماضي علي التعليم بالجنيه

رقم الاسرة	1	2	3	4	5
الريف	200	300	250	350	180
الحضر	400	500	300	250	320

والمطلوب

بافتراض ان حجم الانفاق علي التعليم يتوزع طبيعيا وان البيانات متجانسة

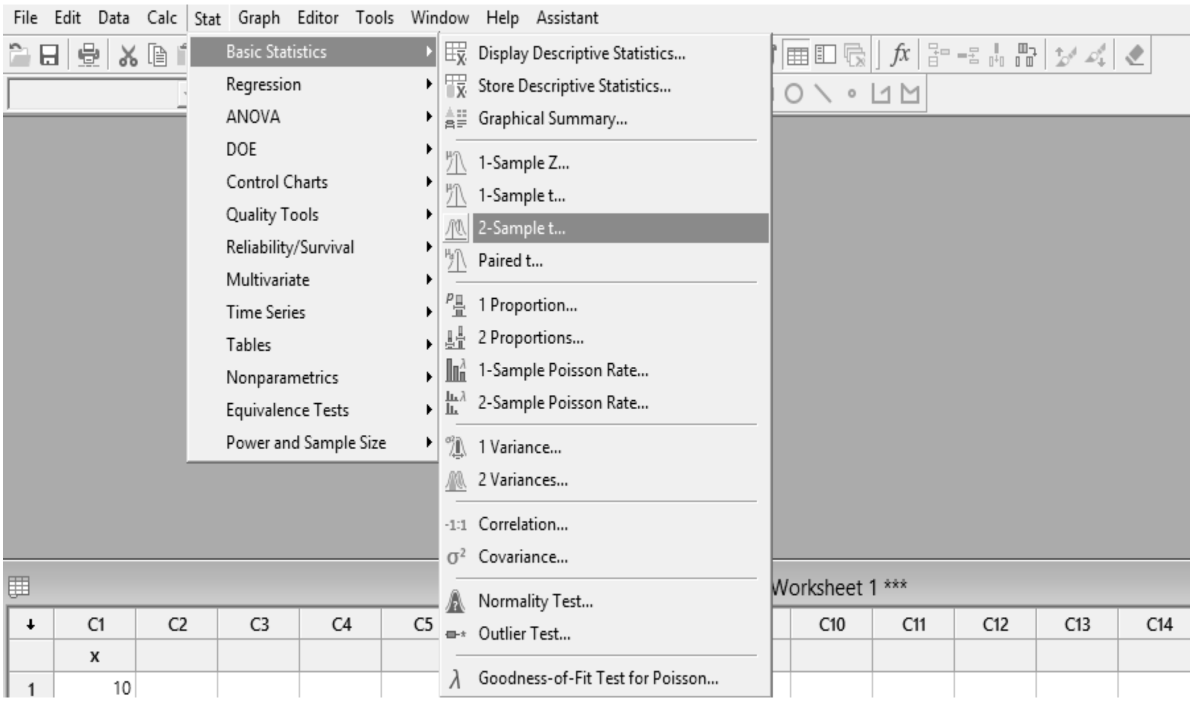
أ) كون فترة ثقة 95% للفرق بين متوسطي حجم الانفاق علي التعليم بواسطة الأسرة في الريف وفي الحضر

ب) احتبر الفرض القائل بان متوسط انفاق الاسرة علي التعليم في الريف يختلف عن انفاق الحضر

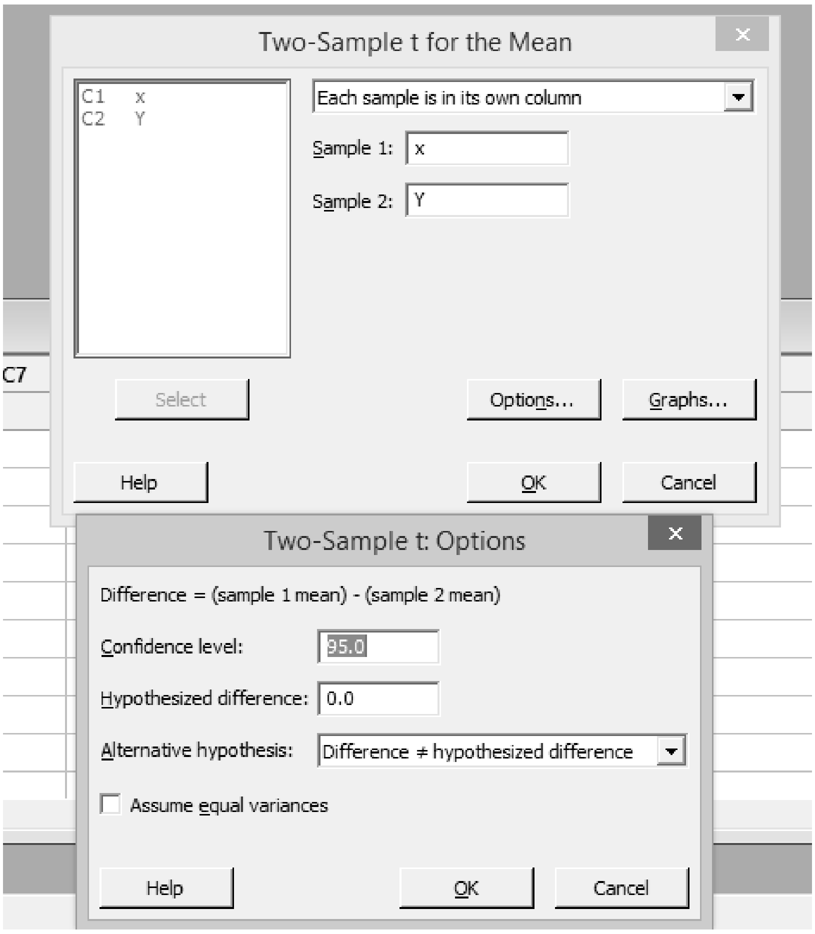
نقوم أولاَ بادخل بيانات العينات كالتالي

↓	C1	C2	C3
	x	Y	
1	200	400	
2	300	500	
3	250	300	
4	350	250	
5	180	320	
6			
7			

نتحرك داخل البرنامج كما هو موضح بالشكل التالي



ثم نختار each sample is in its own column و نختار اسفلها المتغير x ثم المتغير y



فتكون نتائج البرنامج كالتالي

Two-Sample T-Test and CI: x; Y

Method

μ_1: mean of x

μ_2: mean of Y

Difference: $\mu_1 - \mu_2$

Equal variances are not assumed for this analysis.

Descriptive Statistics

Sample	N	Mean	StDev	SE Mean
x	5	256.0	70.2	31
Y	5	354.0	97.9	44

Estimation for Difference

Difference	95% CI for Difference
-98.0	(-225.4; 29.4)

Test

Null hypothesis $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$

Alternative hypothesis $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

T-Value	DF	P-Value
-1.82	7	0.112

لاحظ أن فترة الثقة للفرق بين المتوسطين هي

$$-225.4 \leq \mu_1 - \mu_2 \leq 29.4$$

نقبل الفرض العدمي القائل أنه لا يوجد فرق بين المتوسطين و نرفض الفرض البديل القائل أنه يوجد فرق بين المتوسطين لان قيمة P-Value تساوي 0.112 هي أكبر من 5%

الجزء الثاني

بحوث العمليات

الفصل الاول
نشأة بحوث العمليات

مقدمة

لم تعد القرارات الإدارية في العصر الحديث تعتمد علي الحدس والتخمين و على التجربة والخطأ ، وا ٕنما أصبحت ترتكز على أساس علمي ، دعامته الطريقة العلمية في البحث وأساسه استخدام الأسلوب الكمي للتوصل إلى قرارات أكثر دقة وأصالة علمية .

وا ٕذا كان أسلوب الإدارة التقليدية يتماشى مع الوضع في الماضي بكل ما صاحبه من ظروف ساهمت في الحفاظ عليه حتى عصرنا هذا ، إلا أن الإدارة اليوم تواجه نوعاً من التحدي الناتج عن زيادة أعبائها ، وعدم استقرار الظروف والعوامل المحيطة بها .لذلك فإن كل تقدم تحرزه في سبيل التغلب على هذا التحدي ومواجهته يحقق مزيداً من التقدم ليس فقط في المجتمع المحلي وا ٕنما على مستو ى المجتمع العالمي كله .

فالإدارة لا تمثل أهمية بالغة للدول المتقدمة فقط ، وا ٕنما تزداد أهميتها بالنسبة للدول النامية . فلولاها ما وصلت المؤسسات في الدول المتقدمة إلى المستوى الهائل من الكفاءة والقدرة الإنتاجية وبدونها سوف لا تحقق الدول النامية أهدافها في التقدم والرخاء .

كان لزاماً على المتخصصين في العلوم الإدارية البحث عن قواعد وأسس جديدة للعمل والسلوك الإداري، وذلك مثل بلوغ مستويات الجودة الشاملة ومقاييس المواصفات العالمية

(الأيزو) والإنتاج الآني وغير ذلك ومن هنا ازدادت الحاجة والرغبة نحو اعتماد أساليب علمية متطورة لترشيد القرار الإداري لكي يأتي متجانساً مع ما هو مطروح من تحديات أمام المنظمات الإدارية ومنظمات الأعمال إن هذه الأساليب في مجموعها تعرف باسم بحوث العمليات والذي عرف من قبل المختصين في العلوم الإدارية المنهج الكمي لدراسة الإدارة العامة حيث نمت وتطورت أساليب بحوث

العمليات جنباً إلى جنب مع النمو والتطور الذي حصل في تقنيات الحاسوب والبرمجيات العلمية مما ساعد على توسعه وزيادة تطبيقه في الواقع العملي لمعالجة الكثير من المشاكل في وظائف منظمة الإدارة المختلفة (إنتاج ، أفراد ، خزين ، مالية ،.... إلخ)وسوف أحاول شرح بعض التطبيقات لأساليب بحوث العمليات من خلال نمذجة هذه المشاكل وفق تكتيك رياضي معين حسب طبيعة ومتغيرات المشكلة .

نشأة وتطور بحوث العمليات

تعتبر بحوث العمليات امتداد للاتجاه العلمي في الإدارة ولقد جاء تطبيقها في هذا المجال متأخراً وكان من الممكن أن يستمر لولا التقدم الذي أحرزته القوات الجوية الملكية البريطانية في فتر ة الحرب العالمية الثانية (1939م) في هذا المجال فلقد ظهرت حاجة بريطانيا ماسة إلى مساهمة العلماء في فروع العلوم المختلفة لوضع أسلوب لصد الهجوم الألماني الجوي فعمل فريق من العلماء المتخصصين في بحوث العمليات في استغلال الموارد المحدودة من الرجال والمعدات وتحويل بريطانيا من الدولة المدافعة إلى الدولة المهاجمة .

مفهوم بحوث العمليات

لقد اختلفت وجهات النظر وتباينت الآراء في إيجاد تعريف محدد لبحوث العمليات وخلط البعض بينها وبين بعض الاصطلاحات الأخرى مثل تحليل العمليات وتحليل النظم .

فما الذي تعنيه بحوث العمليات ؟ وبماذا تختلف عن تحليل العمليات والنظم ؟

لقد حاول بعض الكتاب تعريف بحوث العمليات – ونورد هنا أكثر هذه التعريفات شيوعاً

تعريف واجنر : بحوث العمليات هي مدخل العلم المستخدم في حل المشكلات التي تصادف الإدارة العليا للمشروعات ولا يعطى هذا التعريف مفهوماً واضحاً لبحوثث العمليات فهو يقيدها بحل المشكلات ، كما يحدد نطاقها بالإدارة العليا

للمشروعات وبحوث العمليات يتسع نطاقها عن هذا التعريف ، فهي تتعلق باتخاذ القرارات سواءً على نطاق الإدارة التنفيذية أو الإدارة العليا للمشروع .

تعريف مورس ، و كمبال : فقد عرفا بحوث العمليات بأنها تطبيق الطريقة العلمية بتوفير الأساس الكمي الذي يمكن الإدارة من اتخاذ القرارات . هذا التعريف يحدد العناصر الرئيسية لبحوث العمليات وهي استخدام الطريقة العلمية وتوفير الأساس الكمي في اتخاذ القرارات الإدارية ، إلا أن التعريف يمكن أن يكون تعريفاً مناسباً لأساليب الإدارة الأخرى التي ترتكز على الأساس الكمي مثل محاسبة التكاليف .

ومن التعاريف السابقة يمكننا أن نستنتج الاتفاق على بعض الخصائص التي تحدد إطار بحوث العمليات وهي

1. استخدام الطريقة العلمية
2. الارتكاز على الأساس الكمي ممثلاً في أدوات وأساليب بحوث العمليات
3. تمكين الإدارة من اتخاذ قرارات أكثر موضوعية

وعلى أساس ذلك يمكننا وضع تعريف محدد لبحوث العمليات بأنها تطبيق الطريقة العلمية بتوفير الأساس الكمي باستخدام أدوات وأساليب بحوث العمليات كالبرامج الخطية وشبكة الأعمال وذلك لتمكين الإدارة من اتخاذ قرار أكثر موضوعية. ويختلف مفهوم تحليل النظم عن بحوث العمليات ، فتحليل النظم يعني تحليل المكونات التي يتكون منها النظام إلى أجزاء رئيسية ، وبيان الدور الذي يؤديه كل جزء وعلاقته بالأجزاء الأخرى وأهميته في تركيب النظام كوحدة متكاملة وتحليل النظم يساعد الإدارة على تحقيق كفاءة المنظمة ككل دون التركيز على بعض أجزائها .

ونفرض أن الإدارة عليها أن تتخذ قراراً فيما يختص بعدد السلع التي تنتجها وكمية المخزون منها ، فبينما تفضل إدارة الإنتاج عدداً قليلاً من السلع بكميات كبيرة من المخزون لتشغيل طاقة المصنع ، فإن إدارة المبيعات تفضل التعامل مع عدد أكبر من السلع وكميات أكبر من المخزون حتى تتمكن من تلبية احتياجات المستهلكين عند الطلب ، ومفهوم النظم يشير إلى أنه لابد من التوفيق بين أهداف أجزاء النظام بما يخدم مصلحة المنظمة ككل وتطبيق مفهوم النظم في التخطيط الإداري ،

يُعرف ((بتحليل النظم)) وبحوث العمليات ترتكز على مفهوم تحليل النظم كأساس لاتخاذ القرارات الإدارية .

عملية صنع القرار وعلم الإدارة

تتضمن عملية صنع القرار الخطوات التالية

1. **تعريف المشكلة**
2. **تحديد البدائل**
3. **اختيار مقياس للمقارنة بين البدائل**
4. **تقييم البدائل**
5. **اختيار أحد البدائل**

أسباب الحاجة إلى أساليب بحوث العمليات

قد لا يكون هناك حاجة دائمة لأساليب بحوث العمليات إذا كان العمل صغيراً نسبياً خاصةً وأن التحليل الكمي يحتاج إلى الكثير من المعرفة التي قد لا تتوفر لدى المدير مما سيجعله سيضطر إلى الاستعانة بخبراء متخصصين مما يعني زيادة في التكاليف ، ولكن هناك ظروف وحالات تجعل من بحوث العمليات أداة لا غنى عنها في صنع القرار

ويمكننا القول بأن الهدف من استخدام بحوث العمليات هو تخفيض نسبة المخاطرة في اتخاذ القرارات إلى أدنى حد ممكن .

استخدام النماذج في بحوث العمليات

أهم النماذج المستخدمة هي النماذج الرياضية ، والمحاكاة الآلية وهي من حيث المبدأ لا تختلف عن النماذج الأخرى من حيث أنها تمثل وصفاً لموقف أو موضوع معين فمثلاً يمكن صياغة العمليات التي تقوم بها المنظمة في النموذج الرياضي التالي :

الدخل الصافي = الإيرادات – التكاليف

وبطبيعة الحال فإن أطراف المعادلة يمكن تقسيمها إلى عدة أجزاء . فالتكاليف قد تشمل التكاليف الثابتة والتكاليف المتغيرة ، وكذلك الحال بالنسبة للإيرادات فهي قد تشمل إيرادات تشغيلية ، وا إيرادات عرضية ، وأخرى استثمارية .

ويتم بناء النماذج الرياضية في بحوث العمليات من خلال كتابة المشكلة الإدارية في شكل معادلات تضم في تكوينها مجموعة من المتغيرات التي يمكن التحكم فيها ، ومجموعة أخرى من المتغيرات التي لا تستطيع المنظمة التحكم فيها . فمثلاً نجد أن القرار الإداري الخاص بتغيير أسعار منتجات الشركة لا يقف عند حد تغيير الأسعار بل لابد من دراسة تأثير هذا القرار على الإنتاج ، والمبيعات ، والطلب ، وهكذا وعلى هذا فإن النماذج الرياضية لا تقف عند حد استعراض هذه المتغيرات ولكن أيضاً تحليل العلاقة والتفاعل بينها ، وذلك من خلال سلسلة من المعادلات الرياضية.

أساليب بحوث العمليات ومجالات تطبيقها

من أهم أساليب بحوث العمليات المعروفة في الواقع العملي :

1. **البرمجة الخطية**
2. **البرمجة العددية**
3. **جدول المشاريع وتحليل الشبكات**
4. **المحاكاة**
5. **نظرية الصفوف**
6. **تحليل القرارات**
7. **البرمجة غير الخطية**
8. **أسلوب التحليل الشبكي**
9. **نموذج سلاسل ماركوف**

الفصل الثاني
البرمجة الخطية

ظهرت البرمجة الخطية عام 1947م وبالأخص بعد الحرب العالمية الثانية على يد عالم الرياضيات George B. Dantzig الذي كان يعمل خبيرا فى الجيش الأمريكي، وفى عام 1949م نشر جورج دانزيج الطريقة المبسطة Simplex Algorithm لحل البرامج الخطية (المسائل الخطية)، ومنذ هذا الوقت انهالت الاسهامات فى تحسين حل البرامج الخطية بطرق جديدة.

تعريف البرمجة الخطية

يمكن تعريف البرمجة الخطية بأنها هيكل رياضي يشمل على فروض رياضية معينة ويستطيع حل مشكلة تخصيص الموارد المحدودة المتاحة لمتخذ القرار علي بدائل الاستخدام العديدة المتاحة له و ذلك باستخدام خطوات و إجراءات حل رياضية محددة ، بافتراض أن العلاقات بين متغيرات المشكلة تتميز أساساً بالخطية يتم حل مشاكل البرمجة الخطية بإحدى أسلوبين هما الحل البياني و الحل الجبري (السمبلكس).

وتهدف البرمجة الخطية إلى الإجابة باسلوب التحليل الرياضي على بعض الأسئلة وحل المشاكل بما يحقق اكبر ربح ممكن أو اقل تكلفة ممكنة في ظل القيود والمحددات القائمة.

صياغة المشكلة:

المشكلات الامثلية غالبا ما تاتي في صورة كلامية. وتحدد طريقة الحل في تصوير المشكلة في شكل نموذج رياضي يعبر عن المشكلة، ومن ثم يحل هذا النموذج بالاساليب المختلفة. ويمكن اتباع الخطواط التالية في بناء النموذج الرياضي.

1. حدد الكميات التي تحتاج الى قيم مثلى. وعرفها كمتغيرات لتاخذ الرموز $x_1, x_2, \ldots,$
2. عرف هدف المشكلة وغبر عنه رياضياً باستخدام المتغيرات .
3. حدد ومثل القيود في صورة متباينات وذلك باستخدام المتغيرات.
4. اضف الى النموذج الرياضي شرط عدم السالبية (جميع المتغيرات يجب ان تكون اكبر من او تساوي الصفر).

أولاً الــحــل الـبـيـانــي لنماذج البرمجة الخطية

إن الحل البياني لنماذج البرمجة الخطية لا يمكن تطبيقة إلا في حالة كون متغيرات القرار في البرنامج أثنان فقط x_1, x_2 ويعتمد الحل البياني لنماذج البرمجة الخطية علي مجموعة من الخطوات يمكن إيجازها كالتالي .

خطوات الحـــل

1)نقوم بتحديد دالة الهدف سواء كانت نهاية عظمي أو نهاية صغري و كتابة المعادلة الدالة لهذا الهدف

2)نقوم بتحديد القيود و وضع هذه القيود في صورة متباينات

3) نقوم بوضع شرط عدم السالبية و هو $x_1, x_2 \geq 0$

4)نقوم بتحويل المتباينات إلى معادلات

5)نقوم بتمثيل المعادلات السابقة علي إحداثي (x_1, x_2)

6)بعد ذلك نحدد منطقة الحلول الممكنة و ذلك عن طريق قبول المنطقة اسفل كل خط إذا كانت المتباينة التي تخصه تأخذ علامة أقل من اويساوي أوقبول المنطقة أعلي الخط الذي تأخذ المتابينة الخاصة به علامة أكبرمن او يساوي

وتكون منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة التي تحقق كل متابينات المثال.

7) نحدد النقاط التي تحيط بمنطقة الحلول الممكنة بإحداثيات (x_1, x_2)

8) أختبار أي من تلك النقاط الذي يحقق وضع الامثالية لدالة الهدف

ولفهم الخطوات السابق ذكرها نقوم بشرح المثال التالي

مثـال (1)

أوجد قيم x_1, x_2 التي تعظم الدالة z حيث

$$Max \quad z = 300x_1 + 200x_2$$

تحت القيود Subject to (S.T)

$$x_1 + 2x_2 \leq 1000$$

$$3x_1 + x_2 \le 750$$
$$x_1 + 4x_2 \le 800$$

و شرط عدم السالبية $x_1, x_2 \ge 0$

الحـــــــل

1) نقوم بتحويل المتباينات إلى معادلات

$$x_1 + 2x_2 = 1000 \qquad \Rightarrow (1)$$

و لرسم هذه المعادلة نقوم بعمل التعويض التالي

نفرض ان $x_1 = 0$ **و نحسب** x_2 **كالتالي** $\Rightarrow 0 + 2x_2 = 1000$ $\Rightarrow x_2 = \frac{1000}{2} = 500$	**نفرض ان** $x_2 = 0$ **و نحسب** x_1 **كالتالي** $\Rightarrow x_1 + 2 \times 0 = 1000$ $\Rightarrow x_1 = 1000$

و نلخص النتائج في الجدول التالي

x_1	**Zero**	**1000**
x_2	**500**	**Zero**

$$3x_1 + x_2 = 750 \qquad \Rightarrow (2)$$

و لرسم هذه المعادلة نقوم بعمل التعويض التالي

نفرض ان $x_1 = 0$ و نحسب x_2 كالتالي

$\Rightarrow 3 \times 0 + x_2 = 750$

$\Rightarrow x_2 = 750$

نفرض ان $x_2 = 0$ و نحسب x_1 كالتالي

$\Rightarrow 3x_1 + 0 = 750$

$\Rightarrow x_1 = \dfrac{750}{3} = 250$

و نلخص النتائج في الجدول التالي

x_1	**Zero**	**250**
x_2	**750**	**Zero**

$$x_1 + 4x_2 = 800 \qquad \Rightarrow (3)$$

و لرسم هذه المعادلة نقوم بعمل التعويض التالي

نفرض ان $x_1 = 0$ و نحسب x_2 كالتالي

$\Rightarrow 0 + 4x_2 = 800$

$\Rightarrow x_2 = \dfrac{800}{4} = 200$

نفرض ان $x_2 = 0$ و نحسب x_1 كالتالي

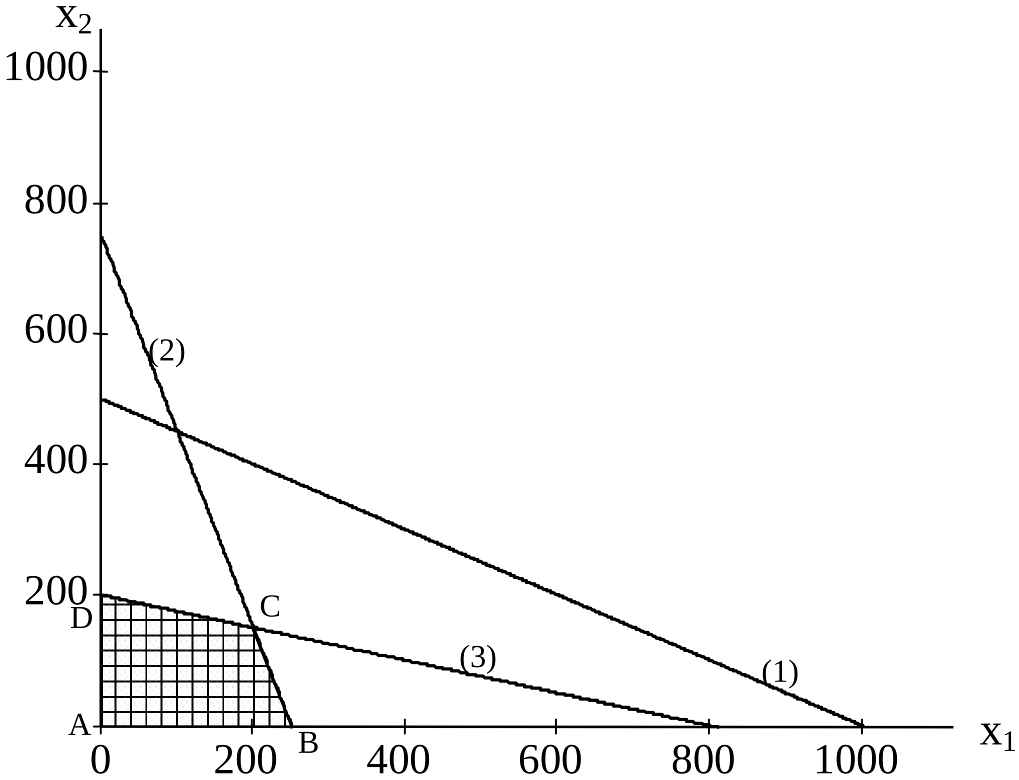
$\Rightarrow x_1 + 4 \times 0 = 800$

$\Rightarrow x_1 = 800$

و نلخص النتائج في الجدول التالي

x_1	**Zero**	**800**
x_2	**200**	**Zero**

2) بعد إيجاد نقط الرسم لكل خط نقوم برسم المخطط كالتالي



من الرسم نلاحظ أن المتباينة الأولي تحمل علامة ≥ و بالتالي فأن المساحة اسفل الخط الذي يمثلها هي منطقة حلول لها و المتباينة الثانية تحمل علامة ≥ و بالتالي فأن المساحة اسفل الخط الذي يمثلها هي منطقة حلول لها و المتباينة الثالثة تحمل علامة ≥ و بالتالي فأن المساحة اسفل الخط الذي يمثلها هي منطقة حلول لها وبالتالي فأن منطقة الحلول الممكنة المساحة التي تشترك في الثلاث مساحات السابقة معاً و هي المنطقة[A,B,C,D]

3) النقط التي تحيط بمنطقة الحلول هي [A,B,C,D]ويكون إحداثي النقط

$A = (0,0) \qquad B = (250,0) \qquad D = (0,200)$

النقطة C هي تقاطع الخطين 2,3**ولذلك نقوم بحل المعادلتين معاً لحساب النقطة C**

$$3x_1 + x_2 = 750 \qquad \Rightarrow (2)$$
$$x_1 + 4x_2 = 800 \qquad \Rightarrow (3)$$

بضرب المعادلة الثانية × 3- تصبح كالتالي

$$-3x_1 - 12x_2 = -2400$$

و بجمع المعادلة الناتجة علي المعادلة الاولى ينتج أن

$$\cancel{3x_1} + x_2 = 750$$
$$-\cancel{3x_1} - 12x_2 = -2400$$

$$-11x_2 = -1650$$
$$\Rightarrow x_2 = \frac{1650}{11} = 150$$

و بالتعويض عن $\mathbf{x_2}$ في أي معادلة و لتكن الاولي نجد أن

$$3x_1 + 150 = 750$$
$$\Rightarrow 3x_1 = 750 - 150 = 600$$
$$\Rightarrow x_1 = \frac{600}{3} = 200$$
$$\therefore\ \mathrm{C} = (200,150)$$

4) نقوم بتصميم الجدول التالي

النقطة	X_1	X_2	دالة الهدف $z = 300x_1 + 200x_2$
A	0	0	$300 \times 0 + 200 \times 0 = 0$
B	250	0	$300 \times 250 + 200 \times 0 = 75000$
C	200	150	$\mathbf{300 \times 200 + 200 \times 150 = 90000}$
D	0	200	$300 \times 0 + 200 \times 200 = 40000$

ثم نختار النقطة التى تعطى اعلي قيمة لدالة الهدف لان دالة الهدف كانت تعظيم و هى النقطة C

$$\therefore \quad x_1 = 200 \qquad\qquad x_2 = 150$$

ملاحـــظات هامة

1) إذا كانت دالة الهدف تدنية و ليس تعظيم نحل بنفس الخطوات تماما لكن في الجدول الاخير نختار النقطة التى تعطي أقل قيمة لدالة الهدف

2) إذا كان القيد في متغير واحد فمثلاً

القيد $x_2 \leq 50$ لما يتحول الي معادلة يكون كالتالي $x_2 = 50$ و يرسم مباشرة بدون تعويض حيث يكون عبارة عن خط موازي للمحور x_1 و يقطع المحور x_2 عند القيمة **50**

القيد $x_1 \leq 20$ لما يتحول الي معادلة يكون كالتالي $x_2 = 20$ و يرسم مباشرة بدون تعويض حيث يكون عبارة عن خط موازي للمحور x_2 و يقطع المحور x_1 عند القيمة **20**

3) إذا جاء التمرين في شكل تمرين كلامى نقوم باستخراج القيود و دالة الهدف بأسلوب بسيط كما سنوضح في المثال التالي .

مثال2

$$Max \quad z = 150x_1 + 200x_2$$

S.T

$$x_1 \leq 60$$

$$x_2 \leq 75$$

$$8x_1 + 10x_2 \leq 800$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

و شرط عدم السالبية

1) نقوم بتحويل المتباينات إلى معادلات

$$x_1 = 60 \qquad \Rightarrow (1)$$

و ترسم المعادلة السابقة عبارة عن خط موازي للمحور x_2 و يقطع المحور x_1 عند القيمة **60**

$$x_2 = 75 \qquad \Rightarrow (2)$$

و ترسم المعادلة السابقة عبارة عن خط موازي للمحور x_1 و يقطع المحور x_2 عند القيمة **75**

$$8x_1 + 10x_2 = 800 \qquad \Rightarrow (3)$$

و لرسم هذه المعادلة نقوم بعمل التعويض التالي

نفرض ان $x_1 = 0$ و نحسب x_2 كالتالي

$$\Rightarrow 8\times 0 + 10x_2 = 800$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{800}{10} = 80$$

نفرض ان $x_2 = 0$ و نحسب x_1 كالتالي

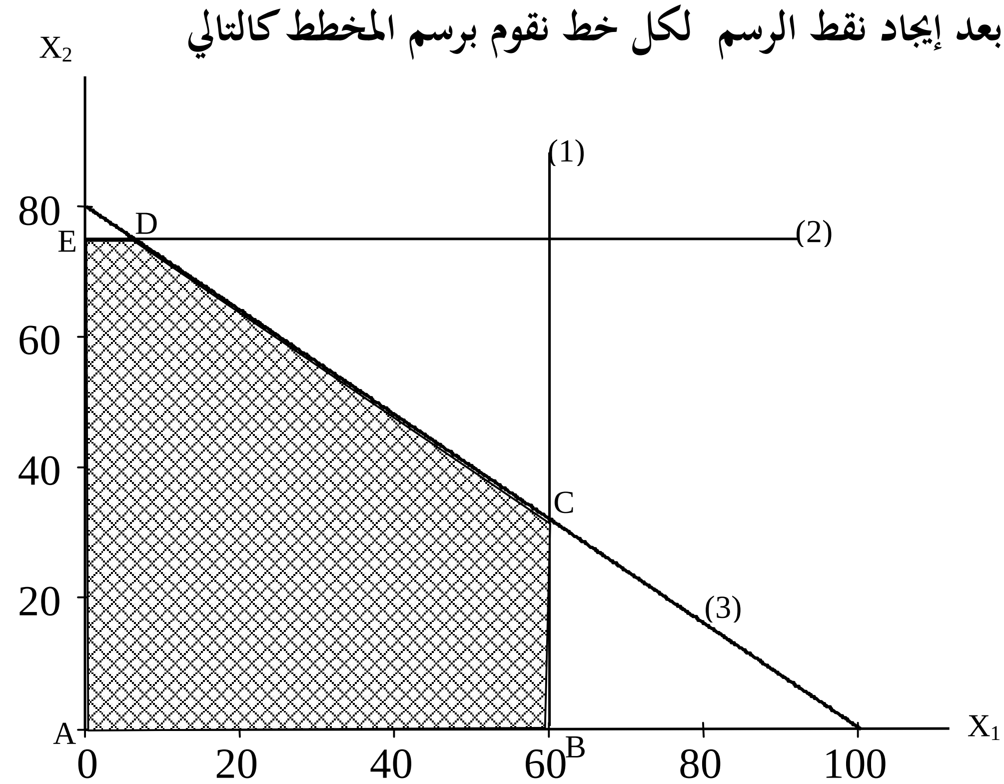
$$\Rightarrow 8x_1 + 10\times 0 = 800$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{800}{8} = 100$$

و نلخص النتائج في الجدول التالي

x_1	**Zero**	**100**
x_2	**80**	**Zero**

2) بعد إيجاد نقط الرسم لكل خط نقوم برسم المخطط كالتالي



3) **النقط التي تحيط بمنطقة الحلول هي [A,B,C,D,E]ويكون إحداثي النقط**

$A = (0,0) \qquad B = (60,0) \qquad E = (0,75)$

النقطة C هي تقاطع الخطين 1,3 **ولذلك نقوم بحل المعادلتين معاً لحساب النقطة C**

$$x_1 = 60 \qquad \Rightarrow (1)$$

$$8x_1 + 10x_2 = 800 \qquad \Rightarrow (3)$$

بالتعويض من 1 في 3 نجد أن

$$8 \times 60 + 10x_2 = 800$$

$$480 + 10x_2 = 800$$

$$\Rightarrow 10x_2 = 800 - 480 = 320$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{320}{10} = 32$$

$$\therefore \qquad c = (60,32)$$

و بالمثل عند حساب النقطة D نجد ان

النقطة D هي تقاطع الخطين 2,3 **ولذلك نقوم بحل المعادلتين معاً لحساب النقطة D**

$$x_2 = 75 \qquad \Rightarrow (2)$$

$$8x_1 + 10x_2 = 800 \qquad \Rightarrow (3)$$

بالتعويض من 2 في 3 نجد أن

$$8x_1 + 10 \times 75 = 800$$

$$8x_1 + 750 = 800$$

$$\Rightarrow 8x_1 = 800 - 750 = 50$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{50}{8} = 6.25$$

$$\therefore \qquad D = (6.25,75)$$

4) **نقوم بتصميم الجدول التالي**

النقطة الطرفية	دالة الهدف $z = 150x_1 + 200x_2$
$A = (0,0)$	$150 \times 0 + 200 \times 0 = 0$
$B = (60,0)$	$150 \times 60 + 200 \times 0 = 9000$
$C = (60,32)$	$150 \times 60 + 200 \times 32 = 15400$
$D = (6.25,75)$	$150 \times 6.25 + 200 \times 75 = 15937\ .5$
$E = (0,75)$	$150 \times 0 + 200 \times 75 = 15000$

ثم نختار النقطة التى تعطى اعلي قيمة لدالة الهدف لان دالة الهدف كانت تعظيم و هى النقطة D

$$\therefore \quad x_1 = 6.25 \qquad\qquad x_2 = 75$$

مثال 3

شركة تقوم بإنتاج منتجين A و B في قسمين 1 و 2 والجدول التالي يوضح الوقت المستهلك في كل قسم لتصنع الوحدة من كل نوع و كذلك الطاقة القصوي لكل قسم

القسم	A	B	الطاقة
الاول	12	6	180
الثاني	4	8	96

كما أن ربح الوحدة من A يساوي 20 جنية و ربح الوحدة من B يساوي 16 جنية

المطلوب تحديد عدد الوحدات الواجب إنتاجها من كل منتج أسبوعيا بهدف تعظيم الأرباح

الحـــــــل

$Max \quad z = 20x + 16y$

Subject to (S.T) تحت القيود

$12x + 6y \le 180$

$4x + 8y \le 96$

$x, y \ge 0$ **و شرط عدم السالبية**

نقوم بتحويل المتباينات إلى معادلات

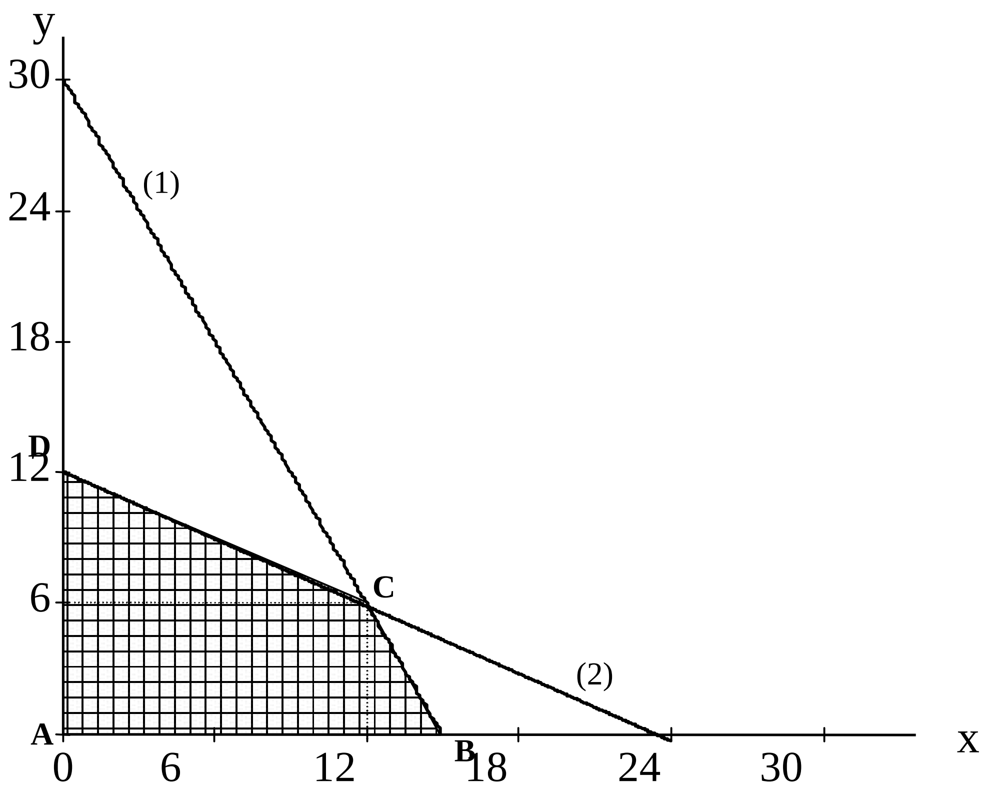
$12x+6y=180 \qquad \Rightarrow (1)$

x	**0**	**15**
y	**30**	**0**

$4x+8y=96 \qquad \Rightarrow (2)$

x	**0**	**24**
y	**12**	**0**

بعد إيجاد نقط الرسم لكل خط نقوم برسم المخطط كالتالي



3) النقط التي تحيط بمنطقة الحلول هي [A,B,C,D]ويكون إحداثي النقط

4) نقوم بتصميم الجدول التالي

النقطة	x	y	دالة الهدف $z = 20x + 16y$
A	0	0	$20 \times 0 + 16 \times 0 = 0$
B	15	0	$20 \times 15 + 16 \times 0 = 300$
C	12	6	$20 \times 12 + 16 \times 6 = 366$
D	0	12	$20 \times 0 + 16 \times 12 = 192$

ثم نختار النقطة التى تعطى اعلي قيمة لدالة الهدف لان دالة الهدف كانت تعظيم و هى النقطة C

$$\therefore \quad x = 12 \qquad\qquad y = 6$$

ملحوظة هامة

إذا كان أحد القيود يأخذ علامة يساوي في هذه الحالة يتم رسم باقي القيود و تحديد منطقة الحل الخاصة بهم ثم نحدد نقاط تقاطع الخط الذي يمثل هذا القيد مع المنطقة الخاصة بباقي القيود و تكون نقاط التقاطع هي نقاط الحل الممكنة فقط و لفهم هذه الجزئية نعرض المثال التالي

مثــال 4

أوجد النهاية الصغري لدالة الهدف حيث

$$Min \quad z = 4x_1 + 4x_2$$

S.T

$$x_1 + x_2 \le 24$$

$$3x_1 + x_2 \ge 27$$

$$x_1 - x_2 = 6$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

و شرط عدم السالبية

الحـل

1) نقوم بتحويل المتباينات إلى معادلات

$$x_1 + x_2 = 24 \qquad \Rightarrow (1)$$

و لرسم هذه المعادلة نقوم بعمل التعويض التالي

نفرض ان $x_1 = 0$ و نحسب x_2 كالتالي

$\Rightarrow 0 + x_2 = 24$

$\Rightarrow x_2 = 24$

نفرض ان $x_2 = 0$ و نحسب x_1 كالتالي

$\Rightarrow x_1 + 0 = 24$

$\Rightarrow x_1 = 24$

و نلخص النتائج في الجدول التالي

x_1	**Zero**	**24**
x_2	**24**	**Zero**

$$3x_1 + x_2 = 27 \qquad \Rightarrow (2)$$

و لرسم هذه المعادلة نقوم بعمل التعويض التالي

نفرض ان $x_1 = 0$ و نحسب x_2 كالتالي

$\Rightarrow 3 \times 0 + x_2 = 27$

$\Rightarrow x_2 = 27$

نفرض ان $x_2 = 0$ و نحسب x_1 كالتالي

$\Rightarrow 3x_1 + 0 = 27$

$\Rightarrow x_1 = \frac{27}{3} = 9$

و نلخص النتائج في الجدول التالي

x_1	**Zero**	**9**
x_2	**27**	**Zero**

$$x_1 - x_2 = 6 \qquad \Rightarrow (3)$$

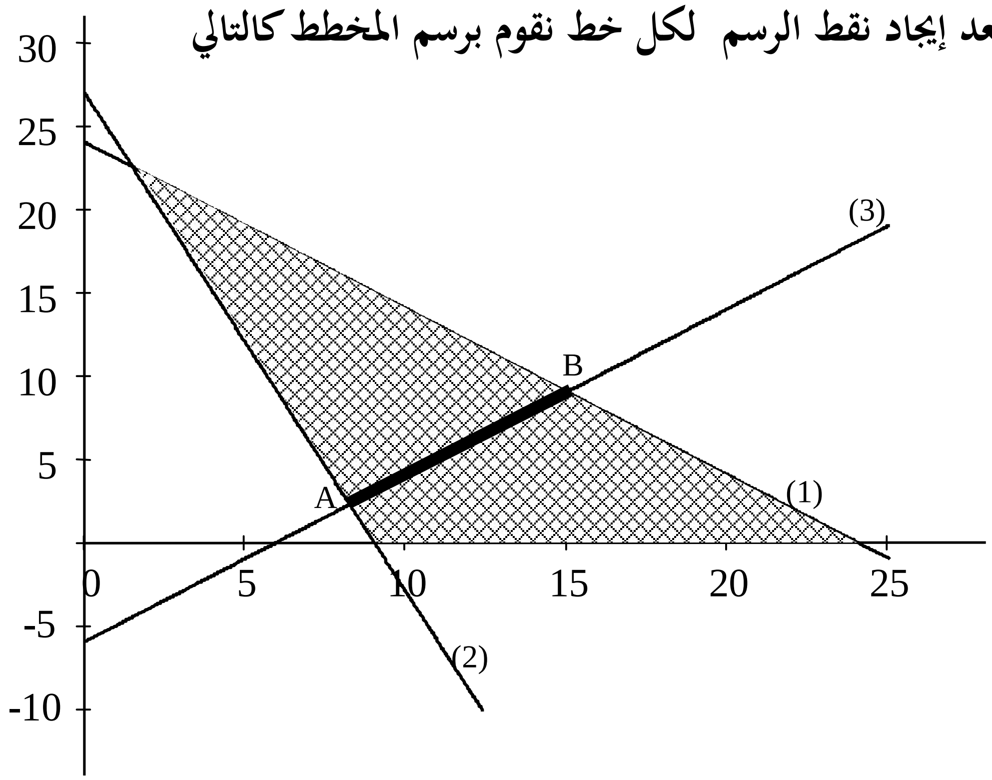
و لرسم هذه المعادلة نقوم بعمل التعويض التالي

نفرض ان $x_1 = 0$ **و نحسب** x_2 **كالتالي** $\Rightarrow 0 - x_2 = 6$ $\Rightarrow x_2 = -6$	**نفرض ان** $x_2 = 0$ **و نحسب** x_1 **كالتالي** $\Rightarrow x_1 - 0 = 6$ $\Rightarrow x_1 = 6$

و نلخص النتائج في الجدول التالي

x_1	**Zero**	**6**
x_2	**-6**	**Zero**

2) بعد إيجاد نقط الرسم لكل خط نقوم برسم المخطط كالتالي



لاحـظ اننـا حـددنا المنطقـة المشـتركة بـين القيـد الاول و الثـاني ثم رسمنـا خـط القيـد الثالث فقطع المنطقة المظلله عند النقاط **A , B** و بالتالي تعتبرها نقاط الحلول الممكنة فقط

لاحـظ اننـا رسمنـا الجـزء السـالب لوجـود قيمـة سـالبة في التعـويض لكـن لاحـظ ان التظليل لم ينزل في المنطقة السالبة لانها ليس ضمن منطقة الحل

النقطة **A** هي تقاطع الخطين 2,3 ولذلك نقوم بحل المعادلتين معاً لحساب النقطة **A**

$$3x_1 + x_2 = 27 \qquad \Rightarrow (2)$$
$$x_1 - x_2 = 6 \qquad \Rightarrow (3)$$

و بالجمع ينتج أن

$$3x_1 + \cancel{x_2} = 27$$
$$x_1 - \cancel{x_2} = 6$$

$$4x_1 = 33$$
$$\Rightarrow x_1 = \frac{33}{4} = 8.25$$

و بالتعويض عن x_1 في أي معادلة و لتكن الثانية نجد أن

$$8.25 - x_2 = 6$$
$$\Rightarrow x_2 = 8.25 - 6 = 2.25$$
$$\therefore\ A = (8.25, 2.25)$$

النقطة **B** هي تقاطع الخطين 1,3 ولذلك نقوم بحل المعادلتين معاً لحساب النقطة **B**

$$x_1 + x_2 = 24 \qquad \Rightarrow (1)$$
$$x_1 - x_2 = 6 \qquad \Rightarrow (3)$$

و بالجمع ينتج أن

$$x_1 + \cancel{x_2} = 24$$
$$x_1 - \cancel{x_2} = 6$$

$$2x_1 = 30$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{30}{2} = 15$$

و بالتعويض عن x_1 في أي معادلة و لتكن الثانية نجد أن

$$15 - x_2 = 6$$

$$\Rightarrow x_2 = 15 - 6 = 9$$

$$\therefore\ \mathrm{A} = (15,9)$$

4) نقوم بتصميم الجدول التالي

النقطة الطرفية	دالة الهدف $z = 4x_1 + 4x_2$
$A = (8.25, 2.25)$ $B = (15,9)$	$4 \times 8.25 + 4 \times 2.25 = 42$ $4 \times 15 + 4 \times 9 = 96$

ثم نختار النقطة التى تعطى اقل قيمة لدالة الهدف لان دالة الهدف كانت تدنية و هى النقطة A

$$\therefore\quad x_1 = 8.25 \qquad\qquad x_2 = 2.25$$

تمارين

السؤال الاول

باستخدام الحل البياني لنماذج البرمجة الخطية أوجد قيم x_1, x_2 **التي تعظم الدالة z حيث**

$$Max \quad z = 30x_1 + 20x_2$$

Subject to (S.T) **تحت القيود**

$$3x_1 + 2x_2 \le 36 \quad , \quad x_1 + 3x_2 \ge 9 \quad , \quad x_1 \le 11$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

السؤال الثاني

باستخدام الحل البياني لنماذج البرمجة الخطية أوجد الكميات المثلي x_1, x_2 **التي النهاية الصغري للدالة z حيث**

$$Min \quad z = 5x_1 + 6x_2$$

Subject to (S.T) **تحت القيود**

$$x_1 + 2x_2 \le 10 \quad , \quad 3x_1 + 2x_2 \ge 6$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

السؤال الثالث

اوجد النهاية العظمى لدالة الهدف باستخدام الطريقة البيانية للحل الامثل حيث أن دالة الهدف هى

$$Max \quad z = 70x_1 + 50x_2$$

Subject to (S.T) **تحت القيود**

$$4x_1 + 4x_2 \le 120 \quad , \quad 2x_1 + x_2 \le 40$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

طريقة تشغيل برنامج (Tora)

1- حمل البرنامج Tora للكمبيوتر .

2- تظهر لك شاشة Tora .

ثم أضغط على أي مفتاح و ليكن Enter.

3- تظهر لك شاشة بالخيارات التالية :

Linear Programming أي البرمجة الخطية.

Transportation Model أي نموذج النقل.

Network Models أي شبكات الأعمال.

Integer Programming أي البرمجة الرقمية.

Queuing Analysis أي تحليل الصفوف.

Histogram/Forcasting أي التنبؤ .

Inventory Models أي نماذج التخزين .

أشر على الخيار الذي تريده من خلال استخدام السهم إلى الأعلى أو إلى الأسفل ، و في الحالة الراهنة ، اختر البرمجة الخطية ، ثم أضغط Enter لتظهر لك على نفس الشاشة من جهة اليمين خيارين وهما :

" Read An Existing Data File " قراءة بيانات تم تخزينها سابقاً .

" Enter New Problem " إدخال بيانات جديدة .

ثم تختار الخيار الثاني " إدخال بيانات جديدة " من خلال استخدام السهم إلى الأعلى أو إلى الأسفل ثم أضغط Enter ، فتظهر لك شاشة جديدة.

4- تحتوي هذه الشاشة على العناصر التالية :

" Problem Title " أي عنوان للمسألة ، فيتم إدخال عنوان المسألة.

" nbr of Variables " أي عدد المتغيرات القرارية ، فيتم إدخال عدد متغيرات المسألة القرارية.

" nbr of Constriants " أي عدد القيود ، فيتم إدخال عدد قيود المسألة ثم نضغط tab.

5-ثم تظهر لك شاشة كتابة دالة الهدف علماً بأن عدد المتغيرات القرارية سيكون كما تمت كتابته في البند "4". فلو كان عدد المتغيرات ثلاث ستظهر كالتالي :

Obj. Function Max/Min X_1 X_2 X_3

وحيث أن :

Obj. Function أي دالة الهدف.

Max/Min أي تعظيم أم تخفيض .

X_1 أي المتغير القراري الأول.

X_2 أي المتغير القراري الثاني.

X_3 أي المتغير القراري الثالث.

ثم أدخل قيم معاملات دالة الهدف ونوعها (تعظيم أم تخفيض) ثم أضغط **Enter** لتظهر لك شاشة قيود المسألة علماً بأن عددها سيكون كما تمت كتابته في البند " **4** ". فلو كان عدد القيود ثلاثة ستظهر كالتالي :

Constriant 1 X_1 X_2 X_3 < = > **RHS**

وحيث أن :

Constriant 1 أي القيد الأول.

X_1 أي قيمة معامل المتغير القراري X_1 في القيد الأول.

X_2 أي قيمة معامل المتغير القراري X_2 في القيد الأول.

X_3 أي قيمة معامل المتغير القراري X_3 في القيد الأول.

< = > أي نوع متراجحة أو معادلة القيد.

RHS أي قيم الطرف الأيسر لمتراجحة أو معادلة القيد.

ثم أدخل قيم معاملات القيود الثاني والثالث ثم أضغط **F8** ليظهر لك السؤال التالي :

Do you wish to save this (new or modified) set of data (y/n)?

أي هل تريد حفظ هذه البيانات ، فتختار إما نعم أو لا.

6 – ثم تظهر لك شاشة بها أربع خيارات و هي :

" **solve problem** " أي حل المسألة.

" **modify data** " أي إحداث تغيير في البيانات.

" **view data** " أي التأكد من صحة البيانات المدخلة .

" **print data** " أي طباعة البيانات.

7- ثم اختر الخيار المناسب من خلال استخدام **Enter**.

8- ثم تظهر لك على نفس الشاشة بديلان وهما :

Automated Procedure أي الطريقة الآلية.

User-guided Procedure أي الطريقة غيرالآلية (اليدوية).

ثم أضغط **Enter** لتختار البديل المناسب (الأول)

9- ثم تظهر لك شاشة بها سبع خيارات وهم :

View solution أي تصفح الحل.

Print solution أي طباعة الحل.

Obtain alternative optimum أي الحصول على حل أمثل آخر.

View optimum tableau أي تصفح جدول الحل الأمثل.

Print optimum tableau أي طباعة جدول الحل الأمثل.

View original data أي تصفح المعلومات الأساسية.

Print original data أي طباعة المعلومات الأساسية.

اختر منها ما تريد من خلال استخدام Enter.

مثـــــال 1 [1]

$$
\begin{array}{lll}
\text{Max.}Z = 5X_1 + 7X_2 & & \\
\text{S.T.} \quad 5X_1 - 2X_2 \geq 10 & & (1) \\
\quad X_1 + X_2 \geq 5 & & (2) \\
\quad -3X_1 + 6X_2 \leq 6 & & (3) \\
\quad 8X_1 + 10X_2 \leq 80 & & (4) \\
\quad X_1 \leq 8 & & (5) \\
\quad X_1 , X_2 \geq 0 & &
\end{array}
$$

للحصول على الحل البياني باستخدام حزمة TORA نتبع الخطوات التالية:

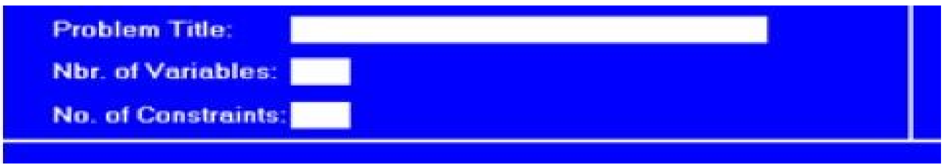
<u>الخطوة (١)</u>: ١- يتم فتح القائمة الرئيسية Menu

من القائمة نختار Linear Programming

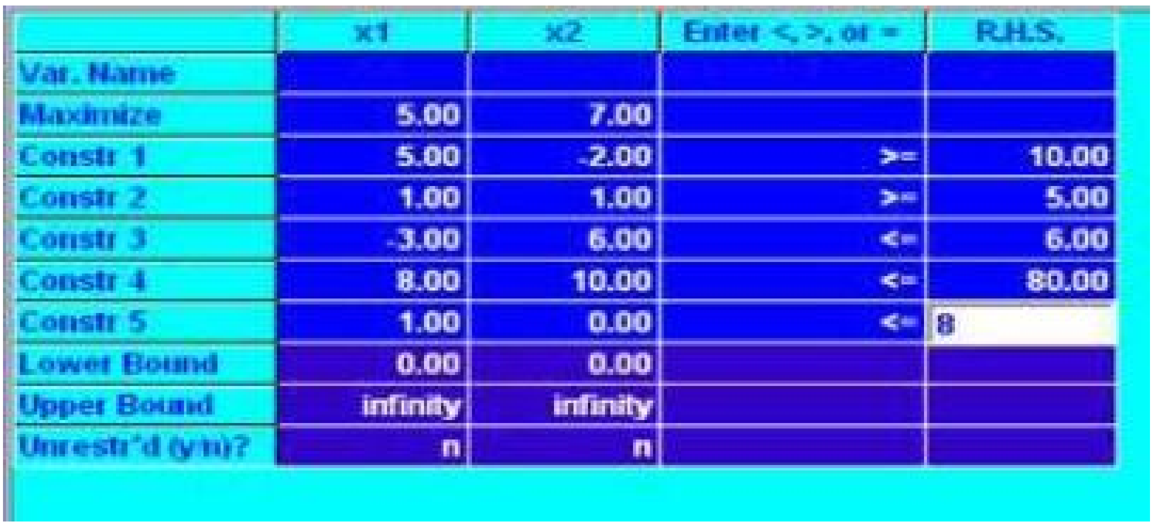
[1] - د.عفاف الدش ، **بحوث العمليات و أتخاذ القرارات، الجزء الاول ، الطبعة الثانية،** الناشر (مكتبة عين شمس) ، القاهرة ، 2012.

فتظهر الشاشة التالية

كون المثال غير مخزن نختار **Enter New Problem** ونختار نوع الارقام **Decimal Notation** ثم يتم الضغط علي "**Go To Input Screen** "

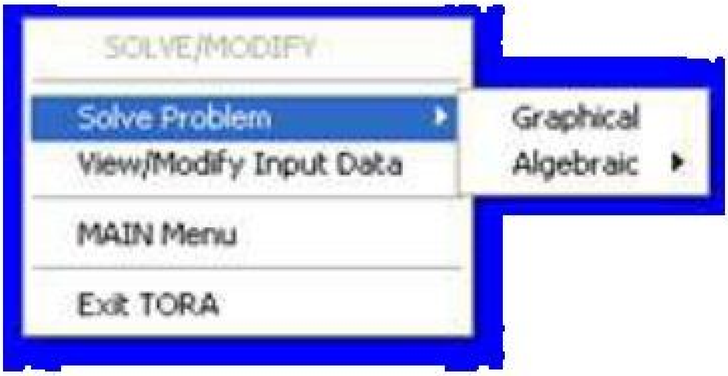


فنقوم بإدخال عنوان المسألة"**Problem Title** " ثم ندخل عدد المتغيرات" **nbr of Variables**" 2 و ندخل عدد القيود" **nbr of Constriants** " 5 ثم الضغط علي مفتاح **tab** من لوحة المفاتيح

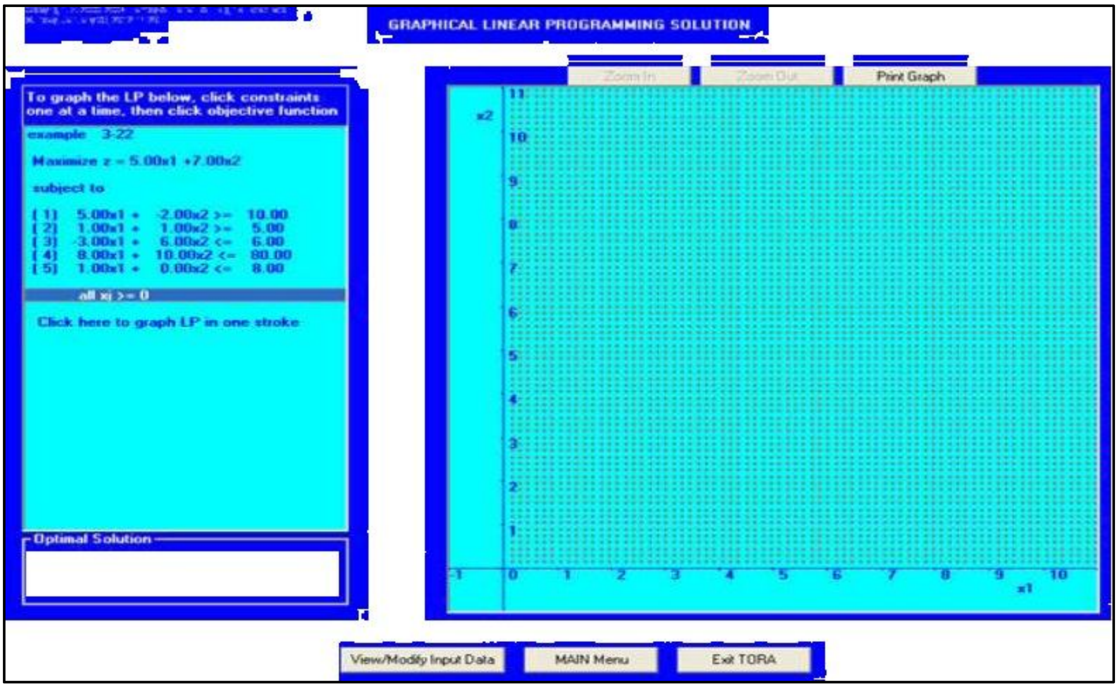


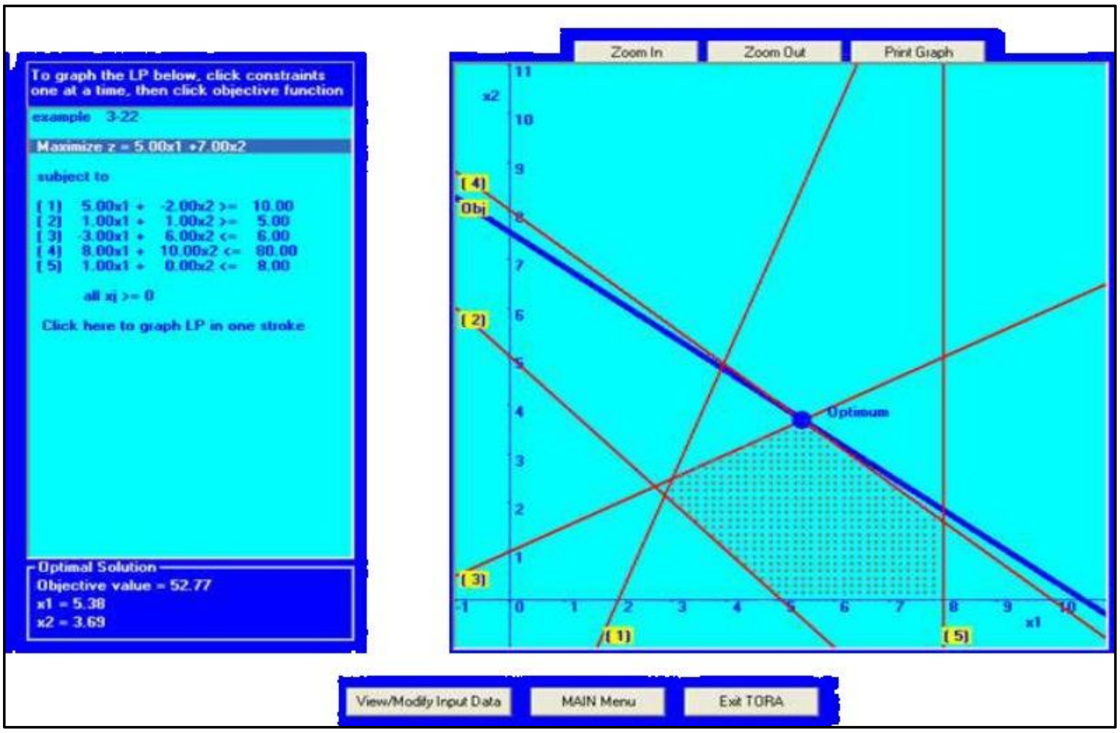
	x1	x2	Enter <, >, or =	R.H.S.
Var. Name				
Maximize	5.00	7.00		
Constr 1	5.00	-2.00	>=	10.00
Constr 2	1.00	1.00	>=	5.00
Constr 3	-3.00	6.00	<=	6.00
Constr 4	8.00	10.00	<=	80.00
Constr 5	1.00	0.00	<=	8
Lower Bound	0.00	0.00		
Upper Bound	infinity	infinity		
Unrestr'd (y/n)?	n	n		

يتم إدخال معاملات دالة الهدف تحديد نوعها **Max/Min** ثم كتابة معاملات القيود بالترتيب و تحديد علامة كل قيد اكبر او يساوي او اقل اويساوي و احياناً يساوي و كتابة الطرف الايمن لكل قيد و باقي البيانات وخصوصاً اخر ثلاثة سطورتظل كما هي ثم نضغط علي **solve problem**



ثم نختار من القائمة الفرعية الحل البياني **Graphical**فيظهر الحل و الرسم و النتيجة النهائية كالتالي





وبالتالي يكون الحل الامثل هو

$z = 52.77 \qquad x_1 = 5.38 \qquad x_2 = 3.69$

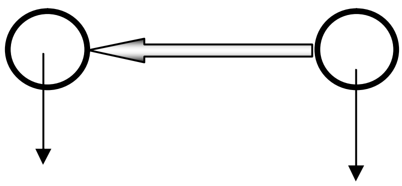
الفصل الثالث

برامج تقييم و مراجعة الاداء [شبكات الاعمال]

من المعلوم أن هناك العديد من المشروعات تتكون من أنشطة متتابعة و متشابكة منها علي سبيل المثال مشاريع البناء و التشييد فنجد أن هناك أنشطة متتابعة مثل حفر الاساسات و عمل الاساسات و بناء الحوائط .... الخ

و بالتالي فإن مثل هذه المشروعات يكون من الضروري تحديد زمن انتهاء المشروع و تكلفة و يهتم موضوع شبكات الأعمال بتحليل مثل هذه المشكلات

أهم مصطلحات شبكات الأعمال

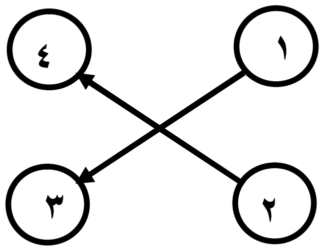
المصطلح	التعريف
١- النشاط	هو أي عمل يستغرق وقت و جهد و مال ويعبر عنة بسهم رأسه عند دائرة النهاية و زيله عند دائرة البداية  نهاية النشاط بداية النشاط
٢ – الحدث	يمثل نقطة بدء النشاط أو نقطة نهايته و بعبر عنة بدائرة عند بداية النشاط و دائرة عند النهاية و نلاحظ أن تتابع الأحداث يكون من اليسار إلى اليمن أو من اليمن إلى اليسار
٣- النشاط الحرج	هو النشاط الذي إذا تأخر يتأخر زمن المشروع كله
٤ –المسار الحرج	هو مجموعة الأنشطة الحرجة المتصلة من دائرة البداية لأول نشاط إلى دائرة نهاية آخر نشاط و يكون صاحب أطول مسار (اكبر مدة زمنية) و زمنه الكلي هو اقصر زمن لإنجاز المشروع
٦- النشاط الوهمي	هو نشاط نضيفه للمخطط من اجل إبراز علاقات التتابع أو من اجل إقفال الشبكة و يكون زمنه دائما صفر

قواعد رسم المخطط الشبكي

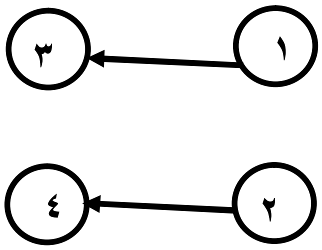
أ – كل أنشطة البداية تخرج من دائرة واحد

ب – كل أنشطة النهاية تنتهي إلى دائرة واحدة

مراعاة عدم تقاطع الخطوط



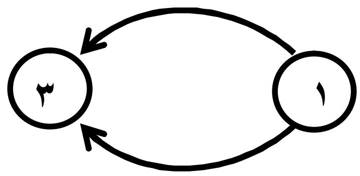
(×)



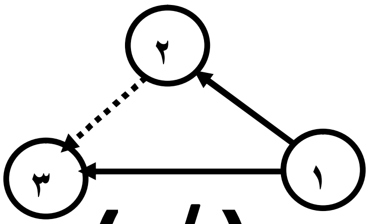
(√)

جـ ممنوع وجود اسهم مرتدة كل الأسهم اتجاها من اليمين إلى اليسار

د – مراعاة عدم وجودة أنشطة متوازية لها نفس البداية و النهاية



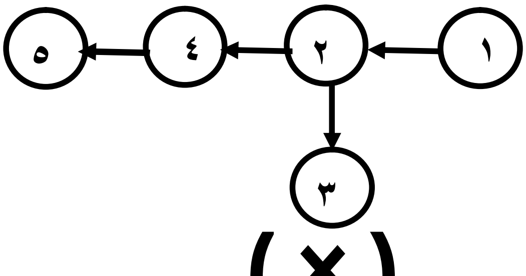
(×)



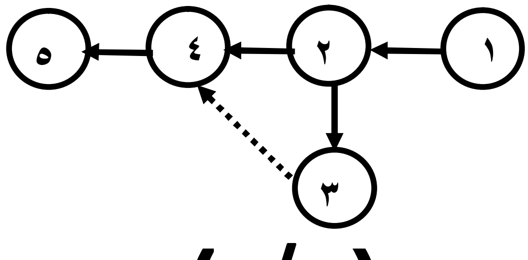
(√)

حيث أن السهم المتقطع يسمي نشاط وهمي زمنه يساوي صفر

و – تجنب وجود أنشطة مدلاه



(×)



(√)

أسلوب تقيم و مراجعة البرامج [PERT]

في أسلوب بيرت زمن يفترض أن لكل نشاط ثلاثة أزمنة و هي

أزمنة النشاط

زمن متفائل [p]	**زمن اكثر شيوعاً [N]**	**زمن متشائم [o]**
في هـذه الحالـة يفـترض الشـــص أن الظـــروف السائدة في أفضل حالاتها	في هـــذه الحالـــة يفـــترض الشـخص أن الظـروف عاديـة و طبيعية	في هـذه الحالـة يفـترض الشـــص أن الظـــروف السائدة سيئة و متشائمة

و نلاحظ أن الزمن يتوزع توزيع إحصائي يسمى توزيع بيتا و بالتالي يمكن حساب المتوسط و التباين للزمن باستخدام العلاقات التالية

الزمن المتوقع للنشاط $= \frac{P+4N+O}{6}$

حساب احتمال انتهاء المشروع في زمن معين (X)

في هذه الحالة نقوم بتحويل المتغير (س) إلى متغير (ز) يتوزع طبيعياً باستخدام العلاقة التالية

$$z = \frac{x - E(t)}{\sigma}$$

حيث أن الانحراف المعياري و هو الجزر التربيعي للتباين الكلي

و يحسب التباين الكلي عن طريق جمع التباينات الخاصة بكل الأنشطة الحرجة حيث

التباين لكل نشاط حرج $\sigma^2 = \left(\frac{O-P}{6}\right)^2$

و بعد حساب Z نبحث عنها في جدول التوزيع الطبيعي z لمعرفة قيمة الاحتمال مع ملاحظة انه لو كانت قيمة Z سالبة نبحث عن القيمة الموجبة بالجدول ثم بعد إيجادها نطرحها من الواحد الصحيح

مثـــــــال

ترغب أحد الشركات في تخطيط البرنامج الزمني لإنشاء أحد مشروعاتها الجديدة و كانت البينات المتاحة هي

النشاط	المسار	أزمنة النشاط		
		متفائل	اكثر احتمالاً	متشائم
A	١ - ٢	٢	٣	٤
B	١ - ٣	٤	٥	٦
C	٢ - ٤	٣	٤	٥
D	٣ - ٥	٥	٦	٧
E	٤ - ٦	٢	٤	٦
F	٥ - ٦	٥	٧	٩
G	٦ - ٧	٥	٦	٧
K	٦ - ٨	٣	٤	٥
L	٧ - ٩	٤	٧	١٠
M	٨ - ٩	٢	٤	٦

و المطلوب

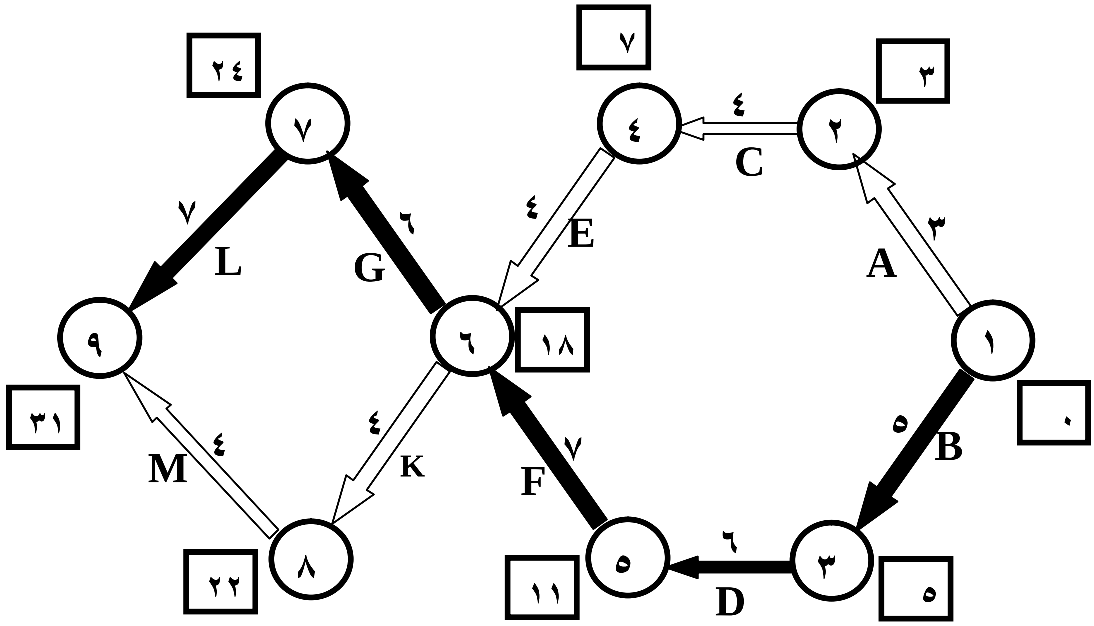
١ – تحديد المخطط الشبكي و تحديد المسار الحرج

٢ – إيجاد الوقت المحدد لكل نشاط

٤ ـ إيجاد احتمال انتهاء المشروع خلال ٣١ أسبوع علي الأكثر

٥ ـ إيجاد احتمال لا يتأخر عن ٣٤ أسبوع

نقوم برسم المخطط كالتالي



و نلاحظ انة تم حساب زمن كل نشاط المحدد [المتوقع] من العلاقة

الزمن المتوقع للنشاط = $\frac{P + 4N + O}{6}$

فمثلا الزمن المتوقع للنشاط A (١ - ٢) يساوي

الزمن المتوقع لـ **A** = (٢ + ٤ × ٣ + ٤) / ٦ = ٣

الزمن المتوقع لـ **B** = (٤ + ٤ × ٥ + ٦) / ٦ = ٥

الزمن المتوقع لـ **C** = (٣ + ٤ × ٦ + ٥) / ٦ = ٤

و هكذا لباقي الأنشطة

يحسب كل مربع بجمع المربع السابق علي الزمن و الدائرة الداخل لها اكثر من سهم ناخذ المجموع الاكبر

و نقوم بعد ذلك بوضع الأزمنة المتوقعة علي الأنشطة و حساب البداية المبكرة لكل نشاط كما هو موضح بالشكل السابق

لحساب المسار الحرج نوجد مجموع أزمنة كل مسار متاح من البداية للنهاية

المسار	الوقت
١ - ٢ - ٤ - ٦ - ٧ - ٩	٣+٤+٤+٦+٧ =٢٤
١ - ٢ - ٤ - ٦ - ٨ - ٩	٣+٤+٤+٤+٤ =١٩
١ - ٣ - ٥ - ٦ - ٧ - ٩	٥+٦+٧+٦+٧ = ٣١
١ - ٣ - ٥ - ٦ - ٨ - ٩	٥+٦+٧+٤+٤ = ٢٦

المسار الحرج هو ١ – ٣ – ٥ – ٦ – ٧ - ٩

وقت إنجاز المشروع = ٣١ أسبوع

نقوم بحساب التباين للأنشطة الحرجة كالتالي

التباين للنشاط **B** = $\left(\frac{O-P}{6}\right)^2 = \left(\frac{4-6}{6}\right)^2 = \frac{1}{9}$

التباين للنشاط **D** = $\left(\frac{5-7}{6}\right)^2 = \frac{1}{9}$

التباين للنشاط **F** = $\left(\frac{5-9}{6}\right)^2 = \frac{4}{9}$

التباين للنشاط **G** = $\left(\frac{5-7}{6}\right)^2 = \frac{1}{9}$

التباين للنشاط **L** = $\left(\frac{6-10}{6}\right)^2 = 1$

و يكون التباين الكلي $\sigma^٢$ = $\frac{١}{٩} + \frac{١}{٩} + \frac{٤}{٩} + \frac{١}{٩} +$ ١

= ١,٧٧٧٧

∴ الانحراف المعياري σ = $\sqrt{1.777777}$ = ١,٣٣٣

 # لحساب احتمال إنهاء المشروع في ٣١ أسبوع نحسب القيمة z كالتالي

$$z = \frac{x - E(t)}{\sigma} = \frac{31 - 31}{1.333} = 0$$

نلاحظ أن قيمة z المقابلة للصفر في الجدول الطبيعي هي ٠,٥

∴ احتمال أن ينفذ المشروع في ٣١ أسبوع = ٥٠ ٪

لحساب احتمال إنهاء المشروع في ٣٤ أسبوع نحسب القيمة z كالتالي

$$z = \frac{x - E(t)}{\sigma} = \frac{31 - 34}{1.333} = 2.25$$

نلاحظ أن قيمة z المقابلة لـ ٢,٢٥ في الجدول الطبيعي هي ٠,٩٨٧٨

∴ احتمال أن ينفذ المشروع في ٣٤ أسبوع = ٩٨,٨٧ ٪

الفصل الرابع
النقل و التوزيع

إذا كان لدينا مجموعة من المصانع تنتج سلعة واحدة متماثلة و لدينا عدد من الاسواق تباع فيها هذة السلعة و كان المراد عمل خطة لنقل الوحدات المنتجة من المصانع إلي الاسواق بحيث تكون تكلفة النقل اقل ما يمكن ومن هنا نشئت نماذج النقل

طبيعة نموذج النقل

١ ـ وجود بيانات تعبر عن الجهات التي تعرض المنتج والجهات الطالبة للمنتج (المصانع ، الاسواق) وبالتالي يكون هناك كميات معروضة وكميات مطلوبة (الطاقات)

٢ـ أن يكون لدينا بيان بتكلفة نقل الوحدة من أي مصنع إلي أي سوق

حيث أن S1 ، S2 ، S3 ، .. **تمثل المصانع**

D1 ، D2 ، D3 ، ... **تمثل الأسواق**

٣) وجود تكلفة نقل الوحدة من كل مصنع إلى كل سوق

وهذه المشكلة تحل بأسلوب السمبلكس الخاص بتدنيه تكلفة النقل وهذا الأسلوب يحتاج مجهود كبير ولكن نظراً لوجود خاصية ملازمة لمشكلة النقل هي أن جميع معاملات المتغيرات في المعادلات هي الواحد الصحيح فإن هذا أسفر تطوير طريقه حل خاصه لمشاكل النقل و هذه الطريقة تتمثل في الخطوات التالية

١ ـ تفريغ بيانات المثال في شكل جدول وبعد تكوين الجدول يمكن الوصول إلى الحل الأمثل بإتباع الخطوات التالية

٢ ـ القيام بتوزيع مبدئي ويتم ذلك بطريقة من طرق عدة سنشرحها

٣ ـ اختبار مثالية الحل وهل هناك إمكانية للتحسين فإذا كان الحل امثل نتوقف وإذا كان الحل ممكن تحسينه نعود مرة أخرى للجدول لتحسين الحل ثم نختبر مرة أخرى و يستخدم في اختبار إمثالية الحل طريقة حجر الوطء

كمدخل لموضوع النقل نعطي المثال التالي :

لو تصورنا على سبيل المثال وجود ثلاث مصانع تقع في ثلاث محافظات هي القاهرة ، دمياط ، المنيا، توزع إنتاجها على ثلاث مراكز توزيع (اسوق) في ثلاث محافظات مختلفة هي ، الوادي الجديد ، المنصورة ، بني سويف

فإذا كانت طاقات الإنتاج لكل مصنع علي التوالي هـي (٥٠٠، ٤٠٠، ١٠٠٠) و طاقـة الاسواق الثلاثة علي التوالي هى (٦٠٠ ، ٤٠٠ ، ٩٠٠) حيث أن

S1 تمثل الكمية المعروضة من مصنع القاهرة

S2 تمثل الكمية المعروضة من مصنع دمياط

S3 تمثل الكمية المعروضة من مصنع المنيا

D1 سوق الوادي الجديد ، **D2** سوق المنصورة ، **D3** سوق بنى سويف

وبفرض أن تكلفة نقل الوحدة من المصنع إلى مركز التوزيع كانت كالتالي

من **S1** إلى**D1 = ٥** ، من **S1** إلى **D2 = ٧** ، من **S1** إلى **D3 = ١٢**

من **S2** إلى **D1 = ١٣** ، من **S2** إلى **D2 = ٣** ، من **S2** إلى **D3 = ٩**

من **S3** إلى **D1 = ١٠** ، من **S3** إلى **D2 = ٦** ، من **S3** إلى **D3 = ١٧**

ونلاحظ أن مجموع الكميات المطلوبة لابد أن يساوي مجموع الكميات المعروضة ليحدث التوازن وإذا لم يحدث ذلك فتكون المشكلة غير متوازنة وهذا غير مقرر و يمكن تفريغ المشكلة في الجدول التالي

الي من	D1	D2	D3	ط المصنع
S1	٥	٧	١٢	٥٠٠
S2	١٣	٣	٩	٤٠٠
S3	١٠	٦	١٧	١٠٠٠
الاحتياجات	٦٠٠	٤٠٠	٩٠٠	١٩٠٠

طــرق الـتــوزيع

أ- طريقة الركن الأيمن العلوي [الشمال الشرقي]

في هذه الطريقة نبدأ بشحن الوحدات من أول خلية في أول صف ونضع في الخلية الطاقة الأقل سواء للمصنع أو السوق ثم ننتقل إلى الخلية التي أسفلها ثم التي بجاورها ثم التي أسفلها وهكذا و نلاحظ أن الخلايا المشحونة تأخذ شكل سلم من اليمين إلى اليسار .

مثـــــال

من الجدول للمثال السابق المطلوب إيجاد تكلفة النقل في حالة استخدام طريقة الركن الأيمن العلوي

الحـــــــل

نقوم أولاً بالبدء في ملء الخانة الأولى في الصف الأول حيث يكون إنتاج المصنع ٥٠٠ و السوق يحتاج ٦٠٠ فنضع في هذه الخانة الرقم الأصغر وهو ٥٠٠

الي من	D1	D2	D3	ط المصنع
S1	٥ / ٥٠٠	٧	١٢	٥٠٠
S2	١٣ / ١٠٠	٣ / ٣٠٠	٩	٤٠٠
S3	١٠	٦ / ١٠٠	١٧ / ٩٠٠	١٠٠٠
الاحتياجات	٦٠٠	٤٠٠	٩٠٠	١٩٠٠

ثم نتحرك للخانة التي أسفلها نجد أن المتبقي للمصنع هو

(٦٠٠-٥٠٠ = ١٠٠) في حين أن طاقة المصنع الثاني هي ٤٠٠

فنضع القيمة الأقل وهي ١٠٠ وبالتالي فأن السوق الأول اخذ كفايته فنتحرك إلى اليسار فنجد أن المصنع الثاني تبقي له (٤٠٠ -١٠٠ =٣٠٠) في حين أن السوق الثاني يحتاج ٤٠٠ و بالتالي نأخذ القيمة الأقل ٣٠٠ ثم نتحرك للخانة التي اسفلها نجد أن المتبقي للسوق هو (

٤٠٠-٣٠٠ = ١٠٠) في حين أن طاقة المصنع الثالث هي ١٠٠٠فنأخذ القيمة الأقل ١٠٠ وبالتالي فأن السوق الثاني اخذ كفايته فنتحرك إلى اليسار فنجد أن المصنع الثالث تبقي له (١٠٠٠ –١٠٠ =٩٠٠) في حين أن السوق الثالث احتياجاته ٩٠٠ وبالتالي نضع القيمة ٩٠٠

و تصبح قيمة تكاليف النقل هي

ت = (٥ × ٥٠٠) + (١٣ × ١٠٠) +(٣ × ٣٠٠)

+ (٦ ×١٠٠) +(١٧ × ٩٠٠) = ٢٠٦٠٠

٢- طرقة الترتيب التصاعدي لتكاليف النقل

في هذه الطريقة نبحث عن اقل تكلفة بالجدول ثم نبدأ بالملء فيها ثم نبحث عن التكلفة التي تليها في الترتيب مع اشتراط أن تكون الخلية قابلة للملء (أي أن صفها أو عمودها لا زل به طاقة متاحة) و نستمر هكذا حتى نوزع طاقات المصانع علي الأسواق بالكامل

مثال

إذا كان لديك مشكلة النقل التالية

الي / من	D1	D2	D3	D4	ط المصنع
S1	١٠	٢٠	٣٠	١٥	٧٠٠٠
S2	١٢	١٩	٢٥	٣٢	٩٠٠٠
S3	٨	٣٥	١٧	٢٦	١٨٠٠٠
الاحتياجات	٨٠٠٠	٥٠٠٠	٧٠٠٠	١٤٠٠٠	٣٤٠٠٠

و المطلوب إيجاد تكلفة النقل في حالة استخدام طريقة الترتيب التصاعدي لتكلفة النقل

الحـــــــل

الي من	D1	D2	D3	D4	ط المصنع
S1	١٠	٢٠	٣٠	١٥ ٧٠٠٠	٧٠٠٠
S2	١٢	١٩ ٥٠٠٠	٢٥	٣٢ ٤٠٠٠	٩٠٠٠
S3	٨ ٨٠٠٠	٣٥	١٧ ٧٠٠٠	٢٦ ٣٠٠٠	١٨٠٠٠
الاحتياجات	٨٠٠٠	٥٠٠٠	٧٠٠٠	١٤٠٠٠	٣٤٠٠٠

نبدأ من الخلية صاحبة اقل تكلفة وهى **(٨)** نضع بها الرقم الأقل و هو ٨٠٠٠ و بالتالي يكون السوق الأول اخذ احتياجاته بالكامل و المصنع الثالث باقي له ١٠٠٠٠ ثم نتحرك للتكلفة التي تليها و هي **(١٠)** فنجد أنها في عمود السوق الأول و بالتالي لا نستطيع وضع أي شئ بها بالمثل للتكلفة التالية و هي **(١٢)** ثم نبحث عن التكلفة التي تليها و هي ١٥ نضع بها الرقم الأقل و هو ٧٠٠٠ و نستمر هكذا حتى نوزع كل طاقات المصانع علي الأسواق

و تصبح قيمة تكاليف النقل هي

ت = (١٥ × ٧٠٠٠) + (١٩ × ٥٠٠٠) +(٣٢ × ٤٠٠٠)

+ (٨ × ٨٠٠٠) +(١٧×٧٠٠٠) = ٥٨٩٠٠٠

٣ – طريقة الفروق (طريقة فوجل التقريبية)

تعطي هذه الطريقة حل نهائي من أول مرة يكون أمثل في الغالبية العظمي من الحالات حوالي ٩٥ % يكون الحل امثل

خطوات الحل بهذه الطريقة

١ – نحسب الفرق بين اقل تكلفتين في كل عمود ونضعها في صف إضافي اسفل صف المجموع ونسميه الفرق الأول و نحسب أيضا الفرق بين اقل تكلفتين لكل صف ونضعها في عمود إضافي بجوار عمود المجموع ونسميه الفرق الأول أيضا

وبالتطبيق علي المثال التالي نجد أن الجدول يصبح كالتالي

الي / من	D1	D2	D3	المجموع	الفرق الاول
S1	١٤	١٢	٩	٤٠٠٠	٣
S2	١٠	١٦	١٢	٦٠٠٠	٢
S3	٨	٩ ٥٠٠٠	١٧	٥٠٠٠	١
المجموع	٢٨٠٠	~~٥٣٠٠~~ ٣٠٠	٦٩٠٠	١٥٠٠٠	
الفرق الأول	٢	٣	٣		

٢ – نحدد أي صف أو عمود صاحب اكبر فرق ثم نقوم ببدء الشحن من الخلية صاحبة اقل تكلفة في هذا الصف أو العمود و في الجدول السابق اكبر فرق يكون لـ ٣ ولكن هذا الفرق لأكثر من صف و عمود وبالتالي نشحن في الصف أو العمود الذي يحتوي علي اقل تكلفة و إذا تساوت بعض الصفوف و الأعمدة في اقل تكلفة نشحن في الخلية التي تستوعب اكبر كمية وبهذا المفهوم سوف نشحن في الخلية S3D2 لأنها تستوعب اكبر كمية فنجد أن السوق D2 يحتاج إلى ٥٣٠٠ وحدة و المصنع S3 ينتج ٥٠٠٠ وحدة و بالتالي نضع في الخلية ٥٠٠٠ و بالتالي فأن المصنع S3لن يغذّي باقي المراكز أي أن الصف S3 لن توضع به قيم أخرى وبالتالي تهمل تكلفة هذا الصف بعد ذلك و يتبقى للسوق D2 (٥٣٠٠-٥٠٠٠ = ٣٠٠)

٣ – نحسب الفروق مرة أخري للصفوف و الأعمدة مع إهمال التكاليف بالصف S3 لأنة اخذ كفايته وتسمي الفروق الجديدة الفرق الثاني و الجدول التالي يوضح ذلك

الي / من	D1	D2	D3	المجموع	الفرق الثاني
S1	١٤	١٢	٩	٤٠٠٠	٣
S2	١٠ ٢٨٠٠	١٦	١٢	~~٦٠٠٠~~ ٣٢٠٠	٢
S3	~~٨~~ –	~~٩~~ ٥٠٠٠	~~١٧~~ –	~~٥٠٠٠~~	–
المجموع	~~٢٨٠٠~~	~~٥٣٠٠~~ ٣٠٠	٦٩٠٠	١٥٠٠٠	
الفرق الثاني	٤	٤	٣		

نلاحظ أن اكبر فرق هو ٤ ولكن هذا الفرق لأكثر من عمود وبالتالي نشحن في العمود الذي يحتوي علي اقل تكلفة وبهذا المفهوم سوف نشحن في الخلية في الخلية S2D1 حيث أن D1 يحتاج ٢٨٠٠ و S2 ينتج ٦٠٠٠ فنضع ٢٨٠٠ ويصبح D1 أخذ كفاية وبالتالي تهمل تكاليفه و يتبقى للمصنع S2

(٦٠٠٠ – ٢٨٠٠ = ٣٢٠٠)

٤ – نحسب الفروق مرة أخري للصفوف و الأعمدة مع إهمال التكاليف بالصف S3 و العمود D1 لأنهم اخذوا كفايتهم وتسمي الفروق الجديدة الفرق الثالث و الجدول التالي يوضح ذلك

الي / من	D1	D2	D3	المجموع	الفرق الثالث
S1	١٤ —	١٢	٩	٤٠٠٠	٣
S2	~~١٠~~ ٢٨٠٠	١٦	١٢ ٣٢٠٠	~~٦٠٠٠~~ ~~٣٢٠٠~~	٤
S3	٨ —	٩ ٥٠٠٠	١٧ —	~~٥٠٠٠~~	—
المجموع	~~٤٨٠٠~~	~~٥٣٠٠~~ ٣٠٠	~~٦٩٠٠~~ ٣٧٠٠	١٥٠٠٠	
الفرق الثالث	—	٤	٤		

نلاحظ أن اكبر فرق هو ٤ ولكن هذا الفرق لصف و عمود وبالتالي نشحن في الصف أو العمود الذي يحتوي علي اقل تكلفة و إذا تساوت في اقل تكلفة نشحن في الخلية التي تستوعب اكبر كمية وبهذا المفهوم سوف نشحن في الخلية S2D3فنلاحظ أن D3 يحتاج ٦٩٠٠ و المصنع S2 متاح له ٣٢٠٠ و بالتالي نضع في الخلية ٣٢٠٠ ويصبح S2 أخذ كفاية وبالتالي تهمل تكاليفه

٥ – نلاحظ انه لم يتبقى سوي صف واحد له تكاليف وهنا نتوقف عن عمل الفروق ونشحن الباقي حسب الخلية التي تناسبه فيصبح الجدول النهائي كالتالي

ويصبح الشكل النهائي للتوزيع هو الموضح بالجدول التالي

الي / من	D1	D2	D3	المجموع
S1	١٤	١٢ ٣٠٠	٩ ٣٧٠٠	٤٠٠٠
S2	١٠ ٢٨٠٠	١٦	١٢ ٣٢٠٠	~~٦٠٠٠~~
S3	٨	٩ ٥٠٠٠	١٧	٥٠٠٠
المجموع	~~٤٨٠٠~~	٥٣٠٠	٦٩٠٠	١٥٠٠٠

و تصبح قيمة دالة الهدف (التكلفة) هي

تكلفة التوزيع = (١٢ × ٣٠٠) + (٩ × ٣٧٠٠) +(١٢ × ٣٢٠٠)

+ (١٠ × ٢٨٠٠) +(٩ × ٥٠٠٠) = ١٤٨٣٠٠

ملحق ١

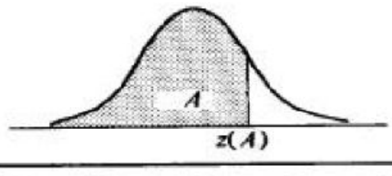
الجداول الاحصائية

STATISTICAL TABLES

Normal Distribution

Table C-1. Cumulative Probabilities of the Standard Normal Distribution.

Entry is area A under the standard normal curve from $-\infty$ to $z(A)$

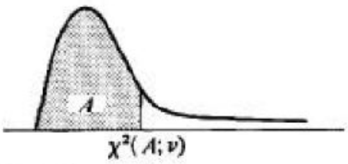


z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

Chi-Square Distribution

Table C-2. Percentiles of the χ^2 Distribution

Entry is $\chi^2(A;\nu)$ where $P\{\chi^2(\nu) \le \chi^2(A;\nu)\} = A$

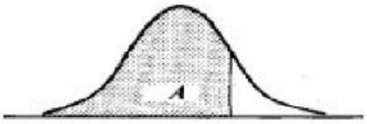


ν	.005	.010	.025	.050	.100	.900	.950	.975	.990	.995
1	0.0^4393	0.0^3157	0.0^3982	0.0^2393	0.0158	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.103	0.211	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.73	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	96.58	101.9	106.6	112.3	116.3
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2

Student's Distribution (*t* Distribution)

Table C-4 Percentiles of the *t* Distribution

Entry is $t(A;\ \nu)$ where $P\{t(\nu) \le t(A;\ \nu)\} = A$



$t(A;\ \nu)$

ν	A: .60	.70	.80	.85	.90	.95	.975
1	0.325	0.727	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706
2	0.289	0.617	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303
3	0.277	0.584	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182
4	0.271	0.569	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776
5	0.267	0.559	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571
6	0.265	0.553	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447
7	0.263	0.549	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365
8	0.262	0.546	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306
9	0.261	0.543	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262
10	0.260	0.542	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228
11	0.260	0.540	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201
12	0.259	0.539	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179
13	0.259	0.537	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160
14	0.258	0.537	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145
15	0.258	0.536	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131
16	0.258	0.535	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120
17	0.257	0.534	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110
18	0.257	0.534	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101
19	0.257	0.533	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093
20	0.257	0.533	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086
21	0.257	0.532	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080
22	0.256	0.532	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074
23	0.256	0.532	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069
24	0.256	0.531	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064
25	0.256	0.531	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060
26	0.256	0.531	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056
27	0.256	0.531	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052
28	0.256	0.530	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048
29	0.256	0.530	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045
30	0.256	0.530	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042
40	0.255	0.529	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021
60	0.254	0.527	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000
120	0.254	0.526	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980
∞	0.253	0.524	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960

Table C-4 (Continued) Percentiles of the *t* Distribution

	A						
ν	.98	.985	.99	.9925	.995	.9975	.9995
1	15.895	21.205	31.821	42.434	63.657	127.322	636.590
2	4.849	5.643	6.965	8.073	9.925	14.089	31.598
3	3.482	3.896	4.541	5.047	5.841	7.453	12.924
4	2.999	3.298	3.747	4.088	4.604	5.598	8.610
5	2.757	3.003	3.365	3.634	4.032	4.773	6.869
6	2.612	2.829	3.143	3.372	3.707	4.317	5.959
7	2.517	2.715	2.998	3.203	3.499	4.029	5.408
8	2.449	2.634	2.896	3.085	3.355	3.833	5.041
9	2.398	2.574	2.821	2.998	3.250	3.690	4.781
10	2.359	2.527	2.764	2.932	3.169	3.581	4.587
11	2.328	2.491	2.718	2.879	3.106	3.497	4.437
12	2.303	2.461	2.681	2.836	3.055	3.428	4.318
13	2.282	2.436	2.650	2.801	3.012	3.372	4.221
14	2.264	2.415	2.624	2.771	2.977	3.326	4.140
15	2.249	2.397	2.602	2.746	2.947	3.286	4.073
16	2.235	2.382	2.583	2.724	2.921	3.252	4.015
17	2.224	2.368	2.567	2.706	2.898	3.222	3.965
18	2.214	2.356	2.552	2.689	2.878	3.197	3.922
19	2.205	2.346	2.539	2.674	2.861	3.174	3.883
20	2.197	2.336	2.528	2.661	2.845	3.153	3.849
21	2.189	2.328	2.518	2.649	2.831	3.135	3.819
22	2.183	2.320	2.508	2.639	2.819	3.119	3.792
23	2.177	2.313	2.500	2.629	2.807	3.104	3.768
24	2.172	2.307	2.492	2.620	2.797	3.091	3.745
25	2.167	2.301	2.485	2.612	2.787	3.078	3.725
26	2.162	2.296	2.479	2.605	2.779	3.067	3.707
27	2.158	2.291	2.473	2.598	2.771	3.057	3.690
28	2.154	2.286	2.467	2.592	2.763	3.047	3.674
29	2.150	2.282	2.462	2.586	2.756	3.038	3.659
30	2.147	2.278	2.457	2.581	2.750	3.030	3.646
40	2.123	2.250	2.423	2.542	2.704	2.971	3.551
60	2.099	2.223	2.390	2.504	2.660	2.915	3.460
120	2.076	2.196	2.358	2.468	2.617	2.860	3.373
∞	2.054	2.170	2.326	2.432	2.576	2.807	3.291

قائمة المراجع

- احمد فؤاد عطية (2009): محاضرات في الاحصاء التحليلي – معهد الدراسات و البحوث الاحصائية , جامعة القاهرة
- شعبان عبد الحميد شعبان (2004) ، محاضرات في الاحصاء الرياضي– معهد الدراسات و البحوث الاحصائية , جامعة القاهرة
- عبد الله الهلباوي (1997) , مقدمة في الاحصاء و الرياضيات , مكتبة عين شمس – القاهرة
- إبراهيم حسن (2011) , الاحصاء التطبيقي , جهاز نشر و توزيع الكتاب الجامعي , جامعة حلوان
- عفاف الدش (2015) , الاحصاء التطبيقي , جهاز نشر و توزيع الكتاب الجامعي , جامعة حلوان
- عفاف الدش (2012) ،بحوث العمليات و أتخاذ القرارات، الجزء الاول ، الطبعة الثانية، الناشر (مكتبة عين شمس) ، القاهرة .
- بهاء سعد (2004) , بحوث العمليات في الإدارة , جهاز نشر و توزيع الكتاب الجامعي , جامعة حلوان
- **Richard Bronson(1982),"Operations Research", Schoum's Outline Series- Theory and Problems, M.c Graw – Hill - Book Company, New York.**
- **Taha H. (1997), "Operations Research: An Introduction", Prentice Hall, International, INC.**